Министерство образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова

Е.И. Щукин

МАТЕМАТИКА.
Теория вероятностей

Учебное пособие
для студентов экономических специальностей
университетов

Ярославль 2000

ББК В 171я73
Щ 95

Щукин Е.И.
МАТЕМАТИКА. Теория вероятностей: Учеб. пособие для студентов экономических специальностей университетов; Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2000. 68 с.
ISBN

Учебное пособие написано в соответствии с программой дисциплины “Математика” для экономических специальностей университетов. Основной принцип, положенный в основу учебного пособия, - принцип единства трех линий математического анализа явлений действительности - стохастической (теоретико-вероятностной), детерминистской (связанной с элементами аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений) и компьютерной (связанной с программированием на Бейсике). В пособии рассматриваются две первых главы теории вероятностей (случайные события; дискретные случайные величины и основные законы их распределения) и приводятся Бейсик-программы, моделирующие случайный выбор некоторых чисел с последующим применением этого для определения статистических вероятностей некоторых событий. Указаны также экономические применения рассматриваемых теоретических предложений.

Пособие предназначено для студентов I курса экономических факультетов университетов.

Рецензенты: кафедра теории и методики обучения математике Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д. Ушинского; доцент кафедры математики Ярославского филиала военного финансово-экономического университета, канд. физ.-мат. наук Н.И. Коршунова.

ISBN

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Основным принципом, положенным в основу этого учебного пособия, является сформулированный автором принцип единства трех линий математического анализа явлений действительности - стохастической (теоретико-вероятностной), детерминистской (связанной с элементами аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений) и компьютерной (связанной с программированием на Бейсике). Именно эти линии (представляющие стохастические, детерминистские и компьютерные модели реального мира) и развиваются в данном пособии.

Поясним сказанное решением следующих двух задач, которые могут быть предложены студентам в самом начале первого курса (а в принципе - даже любой группе молодежи, которая захотела бы принять участие в эксперименте, результаты которого проводящий этот эксперимент берется предсказать достаточно точно).

Задача 1. Случайным образом (наудачу) взяты два числа: $0 < x \leq 2$; $0 < y \leq 2$. Найти $x*y$ и y/x и сравнить: $x*y ? 1$; $y/x ? 2$.

Каждый из участников эксперимента выбирает свою пару чисел (x; y), выступая тем самым в роли “датчика случайных чисел” и сравнивает указанные выше произведения и отношение с 1 и 2. Проводящий эксперимент дает свой прогноз: примерно 4 человека из 10 выбрали свою пару (x; y) таким образом, что у них: $x*y \leq 1$; $y/x \leq 2$. Простым подсчетом узнаем реальную относительную частоту указанного выше события (выбор такой пары (x; y), что: $x*y \leq 1$; $y/x \leq 2$) и сравниваем с предсказанием.

Обсуждая с участниками эксперимента его ход и результаты, приходим к выводу, что мы методом статистических испытаний на небольшой, как правило, выборке, вычислили - и это мы уже указали - относительную частоту некоторого события. Как изменится результат, если объем выборки увеличить и - главное - как это сделать? Откуда проводящий эксперимент узнал число (0,4), к которому - в определенной, конечно, степени - сходится результат и по весьма большой выборке.

Ответами на эти вопросы являются следующие соображения: 1) можно придумать - на языке Бейсик, например, - компьютерную программу и даже не одну - смотрите ВМР 11 и ВМР 12, осуществляющие весьма большую выборку; 2) можно решить задачу на основе геометрического определения вероятности события (используя для вычисления площади некоторой фигуры понятие определенного интеграла - смотрите соответствующее решение на с. ...). Результаты счета по программам ВМР 11 и ВМР 12 и сами программы приводятся ниже.

ВМР 11

```
10 REM СЛУЧАЙНАЯ ПАРА ЧИСЕЛ
20 INPUT "ВВЕДИТЕ ЧИСЛО N"; N
30 A = 0
40 M = 0
50 FOR I = 1 TO N
60 X1 = 2*RND (1)
70 Y1 = 2*RND (1)
80 T1 = X1*Y1
85 L1 = Y1/X1
90 IF T1 < = 1 AND L1 < = 2 THEN 100 ELSE 110
100 M = M+1
110 A = A+1
120 NEXT I
130 W = M/N
140 PRINT "W = ";W
150 END
```

Результаты: N = 100 W = 0.4
N = 1000 W = 0.396
N = 1000000 W = 0.384264
N = 10000000 W = 0.3849506

****

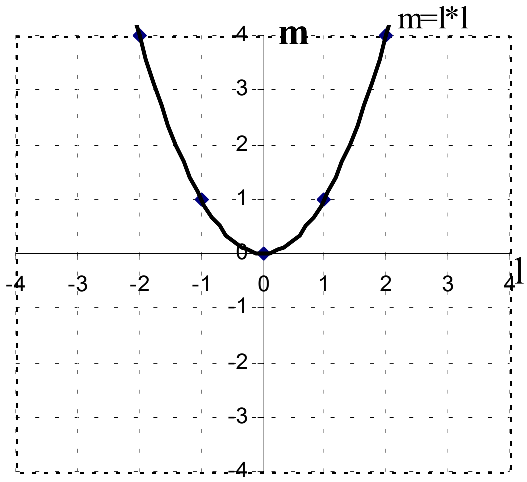
ВМР 12

```
INPUT "enter N >", n
t = 0
FOR a = 1 TO n
x = RND * 2
y = RND 8 2
IF (x * y < = 1) AND (y / x < = 2) THEN t = t + 1
NEXT a
PRINT "it is"; t / n
```

Результаты: N = 100 t = 0.4
N = 1000 t = 0.396
N = 1000000 t = 0.384264
N = 10000000 t = 0.3849506

Задача 2. Наудачу (случайным образом) выбраны два целых числа: $-4 \le l \le 4$; $-4 \le m \le 4$, которые затем используются для составления квадратного уравнения: $x^2 + 2lx + m = 0$. Какова вероятность того, что составлененое таким образом уравнение не имеет действительных (вещественных) корней?

Как и в предыдущем случае, проведем эксперимент: предложим выбрать указанные два **целых** числа (l; m) группе студентов (молодежи) и затем подсчитаем - как и в предыдущем случае - относительную частоту события А, под которым понимаем выбор такой пары (l; m), что дискриминант указанного выше квадратного уравнения меньше нуля ($l * l - m < 0$). Аналогично предыдущему обсуждается вопрос о том, как увеличить объем выборки для уточнения полученных результатов и как другим способом отыскать указанную выше характеристику события А. В результате приходим к следующим соображениям: 1) можно - опять-таки! - придумать на языке Бейсик компьютерную программу (и снова не одну) - смотрите BMP 13 и BMP 131, которые осуществляют большие выборки; 2) можно - по существу на основе классического определения вероятности события - определить указанную характеристику события А, используя следующий чертеж:



$l^2 - m < 0 \quad l^2 < m$

$m > l^2$

$P(A) = 10/81$

Программы BMP 13 и BMP 131 и результаты счета по этим программам приводятся ниже.

BMP 13

```
10 REM СЛУЧАЙНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ
20 INPUIT "Введите число N"; N
30 M = 0
40 A = 0
50 FOR I = 1 TO N
60 XI = 8 * RND (1)-4
70 YI = 8 * RND(1)-4
80 DI = (XI)^ 2-YI
90 IF DI = > 0 THEN 100 ELSE 110
100 M = M+1
```

```
110 A = A+1
120 NEXT I
130 W = M/N
140 PRINT “W = “;W
```

Результаты: N = 100 W = 0.78
N = 1000 W = 0.824
N = 100000 W = 0.83124
N = 1000000 W = 0.832896

****

BMP 131

```
INPUT “enter t”, n
k = 0
FOR a = 1 TO n

metka1:
znak = RND * 10
F = RND
IF znak < 5 THEN 1 = -1 * (F * 10) ELSE 1 = (F * 10)
IF 1 < = -4 OR 1> = 4 THEN GOTJ metka 1

metka2:
znak2 = RND * 10
F2 = RND
IF znak2 < 5 THEN m = -1 * (F2 * 10) ELSE m = (F2 * 10)
IF m < = -4 OR m > = 4 THEN GOTJ metka2

d = 4 * ((1 * 1) - m)
PRINT “d:”; d
IF d > = 0 THEN k = k + 1
NEXT a

w = k/n
PRINT “it is”; w
END
```

Результаты: n = 100 w = 0.85
n = 1000 w = 0.847
n = 100000 w = 0.83151
n = 1000000 w = 0.832877

Таким образом, уже при решении только этих двух задач становится очевидным, что разумное соединение трех линий математического анализа явлений действительности - стохастической, детерминистической и компьютерной - позволяет смотреть на явления действительности с различных сторон и решать поставленные задачи различными способами, которые позволяют нам приходить к одному и тому же результату.

В заключении укажем рабочий план новой учебной дисциплины “Математика: общий курс”, который осуществляется на тех специальностях, где эта дисциплина изучается в течение 33 недель, причем в каждой неделе проводятся 2 лекционных часа и 2 часа упражнений.

I семестр (18 недель)

Теория вероятностей

Стохастический анализ - I

1. Классификация событий. Определение вероятности события (классическое; статистическое; геометрическое) 2/2
2. Элементы комбинаторики (перестановки; размещения; сочетания) 2/2
3. Сумма и произведение событий. Теоремы о нахождении вероятности суммы событий 2/2
4. Зависимые и независимые события. Условная вероятность события. Теоремы о нахождении вероятности произведения событий 2/2
5. Полная вероятность события. Теорема о переоценке вероятностей гипотез (формула Байеса) 2/2
6. Дискретные случайные величины (ДСВ). Закон распределения ДСВ. Числовые характеристики ДСВ 2/2
7. Равномерное дискретное распределение. Теорема о повторении опытов. Формулы Бернулли и Пуассона 2/2
8. Распределения Бернулли, Пуассона и геометрическое программирование на языке Бейсик (элементы компьютерного моделирования) 2/2

Программирование на языке Бейсик

9. Устройство ЭВМ 2/2
10. Программирование на языке Бейсик 2/2

Метод координат (и его применение при изучении линий, функций и других множеств точек плоскости)

11. Основные числовые множества. Координаты точки на плоскости 2/2
12. Функция. Взаимно-обратные функции 2/2
13. Основные элементарные функции 2/2
14. Уравнение линии на плоскости. Окружность. Парабола 2/2
15. Эллипс 2/2
16. Гипербола 2/2
17. Прямая на плоскости 2/2
18. Резерв

II семестр (15 недель)
Дифференциальное и интегральное исчисления

19. Числовые последовательности; их сходимость или расходимость	2/2
20. Предел функции непрерывного аргумента. Теоремы о пределах	2/2
21. Первый и второй замечательные пределы	2/2
22. Непрерывность. Понятие производной	2/2
23. Основные правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций	2/2
24. Общая схема исследования функции	2/2
25. Дифференциал функции. Уравнение Мальтуса	2/2
26. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования	2/2
27. Определенный интеграл. Аналитические и численные методы. Нахождение определенных интегралов	2/2
28. Несобственные интегралы I и II рода	2/2

Стохастический анализ - II

29. Непрерывная случайная величина (НСВ). Интегральная и дифференциальная функции распределения; их свойства и графики	2/2
30. Числовые характеристики НСВ. Равномерные непрерывное и экспоненциальное распределения	2/2
31. Нормальное распределение. Правило “трех сигм”	2/2
32. Неравенство и теорема Чебышева	2/2
33. Теорема Ляпунова (центральная предельная теорема) и следствия из нее	2/2
Итого:	66/66

Теория вероятностей (стохастический анализ)

Название “стохастический анализ” происходит от греческого слова *stochastikos*, что означает “умеющий угадывать” (именно: “умеющий угадывать” – а не “гадающий”). И – как показывают рассмотренные во “Введении” задачи (“Случайная пара (двойка) чисел”, “Случайное квадратное уравнение” – действительно “умеют угадывать” (предсказывать, прогнозировать) те, кто знаком с основными положениями теории и практики стохастического анализа (теории вероятностей).

Заметим, что среди всех понятий теории вероятностей выделяются три ключевых понятия, с которых и начинается изучение этого раздела математики: 1. Опыт (эксперимент, испытание). 2. Событие (явление) – тот или иной исход опыта. 3. Вероятность события – количественная характеристика возможности того или иного исхода опыта.

Возвращаясь к задаче “Случайная пара чисел”, видим, что опыт здесь заключается в выборе (случайным образом) пары чисел $(x;y)$: $0 < x \le 2$; $0 < y \le 2$. Событие, которое нас интересовало, заключалось в выборе такой пары чисел $(x;y)$, для которой: $xy \le 1$; $y/x \le 2$ (ясно, что наш опыт имел и другие исходы). Вероятность заинтересовавшего нас события (т.е. количественная оценка возможности именно этого исхода опыта) была нами вычислена, исходя из наблюдений, которые мы интуитивно связывали с геометрическими или некоторыми другими соображениями.

Можно указать и другие, даже более простые примеры, где действует эта интересующая нас триада: опыт – событие – вероятность события. Рассмотрим в качестве опыта подбрасывание монеты, в качестве события – появление цифры (герба) после подбрасывания монеты. Ясно, что вероятность появления герба и есть 1/2. Компьютерная модель этой ситуации, записанная в программе BMP20, подтверждает это рассуждение.

Обратимся к другому примеру. Заметим, что исторически вероятность произошла, видимо, из анализа азартных игр. По крайней мере, известно, что в игры со случайным исходом люди играли более 5000 лет назад. Одна из таких игр – естественно модифицированная – популярна и сейчас – это игра “в кость” (ныне – кубик с шестью гранями, на которых помечены цифры: 1, 2, 3, 4, 5, 6 или нанесено соответствующее число точек – “очков”). В качестве опыта рассмотрим подбрасывание игрального кубика; в качестве события – появление (на верхней грани) – числа 2 (например). Интуитивно ясно, что это число появится с такой же вероятностью, как и любые другие из оставшихся 5 чисел (1, 3, 4, 5, 6), а именно – 1/6.

Все наблюдаемые нами события (явления) можно разделить на 3 группы: достоверные, невозможные, случайные (или возможные).

Определение 1. Достоверным называется событие, которое обязательно произойдет при осуществлении определенной совокупности условий (в результате данного опыта).

Например: попадание или промах при одном выстреле; появление не белого шара из ящика, в котором лежат синие, красные и черные шары.

Определение 2. Невозможным называется событие, которое не может произойти при осуществлении определенной совокупности условий (в результате одного опыта).

Например: одновременное попадание и промах при одном выстреле; появление белого шара из ящика, в котором лежат синие, красные и черные шары; появление грани с цифрой 7 при подбрасывании упомянутого выше кубика.

Определение 3. Случайным называется событие, которое при осуществлении определенной совокупности условий (в результате данного опыта) может произойти, а может и не произойти.

Например: извлечение синего шара из ящика, в котором лежат синие, красные и черные шары; попадание в цель при одном выстреле; выпадение грани с цифрой “5” при подбрасывании игрального кубика; появление стандартной детали из ящика, в котором лежат стандартные и нестандартные детали.

Любое случайное событие – следствие очень многих причин и обычно невозможно учесть их влияние на результаты опыта, поэтому невозможно решить задачу: произойдет или нет единичное случайное событие.

Однако ситуация изменяется, когда рассматривается совокупность однородных случайных событий. Оказывается, что если взять достаточно большое число однородных случайных событий (явлений), то независимо от их конкретной природы они подчиняются определенным закономерностям, изучением которых и занимается теория вероятностей (стохастический анализ).

Определение 4. Теория вероятностей (стохастический анализ) есть наука (часть математики), изучающая закономерности массовых однородных случайных событий.

Глава I. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. Классификация событий. Классическое определение вероятности события

Все указанные выше группы событий – достоверные, невозможные, случайные – можно объединить с единой точки зрения, для чего введем следующие определения (включая классическое определение вероятности события).

Определение 1. События называются *несовместными*, если появление одного из них в данном опыте исключает появление других событий в том же опыте.

Пример 1. Из ящика с радиодеталями извлечена наугад одна деталь. Ясно, что появление стандартной детали исключает появление в том же опыте нестандартной детали; следовательно, два события:

событие А – “появилась стандартная деталь”,

событие В – “появилась нестандартная деталь” – несовместны.

Пример 2. Рассмотрим уже известный нам игральный кубик “Кубик-6”. Ясно, что события:

“выпала цифра 2 (выпали 2 очка)”,

“выпала цифра 5 (выпали 5 очков)” – несовместимы.

Определение 2. События образуют *полную группу*, если появление одного из них в результате опыта является достоверным событием.

Пример 1. Из ящика с деталями (стандартными и нестандартными) извлекается одна деталь. Она обязательно окажется или стандартной, или нестандартной. Указанные события образуют полную группу.

Пример 2. (“Кубик-6”). События:

“выпало 1 очко”

“выпало 2 очка”

“выпало 3 очка”

“выпало 4 очка”

“выпало 5 очков”

“выпало 6 очков”

образуют полную группу событий (так как в результате опыта – подбрасывания кубика – одно из них обязательно произойдет).

Если полная группа событий состоит из двух событий, то они называются противоположными (так, в примере 1 события – “появилась стандартная деталь”, “появилась нестандартная деталь” – противоположные; они обычно обозначаются А и В).

Определение 3. События называются *равновозможными*, если нет оснований отдавать предпочтение одному из них.

Например, выпадение любого числа очков на игральном кубике – события равновозможные (если этот кубик изготовлен из однородного материала и имеет действительно форму куба).

Определение 4. Те исходы опыта, при которых интересующее нас событие обязательно произойдет, называются *благоприятствующими* этому событию.

Пример 1. (“Кубик-6”). Событие, которое нас интересует, – “выпадение не менее 2-х очков”. Тогда благоприятствующие этому событию исходы – “выпадение 2 очков”, “выпадение 3 очков”, “выпадение 4 очков”, “выпадение 5 очков”, “выпадение 6 очков”. Таким образом, исходов, благоприятствующих событию “выпадение не менее 2-х очков”, – 5.

Пример 2. (“Набор-10”). Имеется набор из 10 одинаковых на вид открыток, на обратной стороне которых – стихотворные тексты Лермонтова (3), Пушкина (2), Омара Хайяма (1), Веневитинова (1), Анны Ахматовой (1), на двух открытках текста нет. Пусть нас интересует событие – “извлечение открытки со стихотворным текстом”. Ясно, что число исходов, благоприятствующих этому событию, - 8 (= 3+2+1+1+1).

Определение 5. (классическое определение вероятности события).

Вероятностью события А называется отношение числа исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу всех равновозможных исходов, образующих полную группу.

Обозначим: m – число исходов, благоприятствующих событию А;

n – общее число всех равновозможных исходов, образующих полную группу.

P(A) – вероятность события А.

Тогда $P(A) = m/n$; $0 \le m \le n$.

Если $m = 0$, то это означает, что А – невозможное событие и P(A) = 0.

Если $m = n$, то А – достоверное событие; P(A) = 1.

Таким образом, всегда: $0 \le P(A) \le 1$.

Пример 1. (“Кубик-6”).

Событие А – “выпадение не менее 2-х очков”

P(A) = 5/6.

Пример 2. (“Набор – 10”).

Событие S – “извлечение открытки со стихотворным текстом”

P(S) = 8/10 = 4/5.

2. Статистическое определение вероятности события

Предварительно рассмотрим т.н. относительную частоту события А, которая определяется как отношение числа испытаний, в которых событие А наступило, к общему числу произведенных испытаний. Обозначим:

W(A) – относительная частота события А;

m – число испытаний, в которых событие А наступило;

n – общее число произведенных испытаний.

Тогда $W(A) = m/n$; $0<W(A)<1$.

Пример 1. По цели произведено 20 выстрелов; зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

Событие А – “попадание в цель”; m = 18; n = 20

W(A) = 18/20 = 0.9

Замечено, что относительная частота W(A) меняется от одной серии испытаний к другой, и в то же время с увеличением числа испытаний n имеет тенденцию стабилизироваться около некоторого числового значения (посмотрим, например, еще раз на результаты счета по программам BMP11, ВМР12, ВМР13, ВМР131). Вот это числовое значение и определяется как статистическая вероятность соответствующего события.

3. Геометрическое определение вероятности события

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Естественно считать, что вероятность попадания на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L. Тогда вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством:

$$P = \text{длина } l \,/\, \text{длина } L.$$

Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Естественно считать, что вероятность попадания брошенной точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее раположения относительно G, ни от формы g. Тогда вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством

$$P = \text{площадь } g / \text{площадь } G.$$

Аналогично определяется вероятность попадания точки в пространственную фигуру v, которая составляет часть фигуры V:

$$P = \text{объем } v / \text{объем } V.$$

<u>Пример 1.</u> На отрезке L = 20 см помещен меньший отрезок l = 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на большой отрезок, попадет также и на меньший отрезок.

P = 10/20 = 1/2 = 0,5.

<u>Пример 2.</u> На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями.

$r = 5 \quad S1 = \pi r^2 = \pi 5^2 = 25\pi$

$R = 10 \quad S2 = \pi R^2 = \pi 10^2 = 100\pi$

$P = (S2-S1)/S2 = (100\pi - 25\pi)/100\pi = 1-1/4=3/4$

Практическое занятие № 1

Определения вероятности (классическое, статистическое, геометрическое)

<u>Задача 1.</u>

В некоторой учебной группе 10 юношей и 12 девушек. Определить вероятность того, что учащийся, стоящий в списке под номером 11, принадлежит к прекрасной половине человечества.

$P = 12/22 = 6/11$.

Задача 2.

В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Из них на 1 билет попадает выигрыш в 500 рублей, на 10 - 100; на 50 - 20; на 100 - 5; Остальные билеты без выигрыша. Некто покупает один билет. Найти вероятность выигрыша не менее 20 рублей.

$P(A) = (1+10+50)/1000 = 0{,}061$.

Событие A = “выигрыш не менее 20 рублей”.

Задача 3.

Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным окажется:

а) случайно названное двузначное число;

б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.

а) $P = 1/90$; б) $P = 1/81$.

Задача 4.

Брошены 2 игральных кубика. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 3.

Некто предлагает следующее решение задачи: “Возможны 2 исхода: сумма выпавших очков равна 3; сумма выпавших очков $\neq 3$. Интересующему нас событию отвечает (благоприятствует) один исход, вероятность его 1/2". В чем ошибка этого “решения”? Дайте правильное решение задачи.

Ошибка “решения” в том, что указанные исходы не являются равновозможными.

Правильное решение: общее число равновозможных исходов есть $6*6 = 36$ (каждое число очков, выпавших на одном кубике, может сочетаться со всеми числами очков, выпавших на другом кубике). Среди этих исходов событию A (сумма выпавших очков равна 3) благоприятствуют только два исхода: (1;2) и (2;1) – в скобках указаны числа выпавших очков. Отсюда

$P(A) = 2/36 = 1/18$.

Задача 5.

Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что извлеченный наудачу кубик имеет окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

Решение: рассмотрим сначала событие в). Кубик имеет три окрашенные грани, если он находился на вершине куба; так как всего у куба восемь вершин, то $P(в) = 8/1000 = 0{,}008$. Обратимся теперь к событию б). Две окрашенные грани были на кубике, если он лежал на ребре (из которого вершинные точки естественно исключены). Всего таких кубиков $8*12 = 96$ (т.к. ребер 12). Тогда $P(б) = 96/1000 = 0{,}096$. Наконец событию а) отвечают кубики, лежавшие на гранях куба (за исключением кубиков, лежавших на ребрах); таких кубиков 64*6 = 384, т.е. P(a) = 384/1000 = 0,384.

Задача 6.

Монета брошена 2 раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится “герб”.

Ответ: (г;г), (ц;ц), (ц;г), (г;ц)

P = 3/4.

Задача 7.

Какова вероятность того, что квадрат наудачу взятого целого числа оканчивается цифрой 1?

Решение:

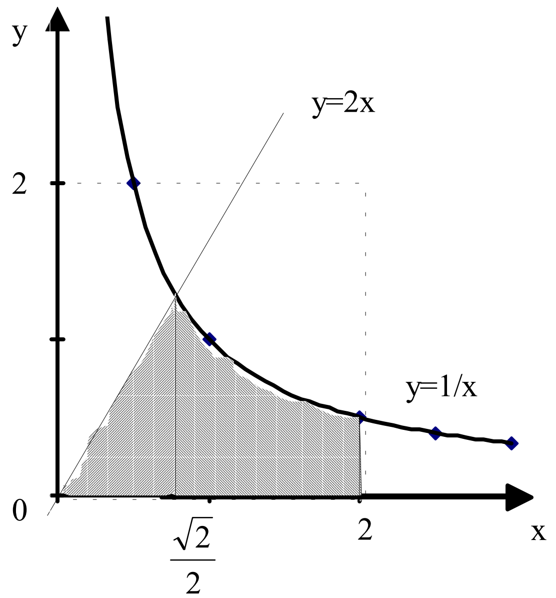
x …1 …2 …3 …4 …5 …6 …7 …8 …9 …0

x^2 …1 …4 …9 …6 …5 …6 …9 …4 …1 …0

P = 2/10 = 1/5.

Задача 8.

Наудачу взяты два неотрицательных числа x и y, каждое из которых не превышает 2. Найти вероятность того, что произведение $x*y \le 1$, а частное $y/x \le 2$.



A = {(x;y): $x*y\le 1$; $y/x\le 2$}

$x*y\le 1$; $y\le 1/x$

$y/x\le 2$; $y\le 2x$

P(A) = S1/S2 S2 = 4

S1 = S3+S4

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ y = 2x \end{cases} \quad 2x = \frac{1}{x}$$

$$x^2 = \frac{1}{2};\; x > 0$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S3 = \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} * \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

$$S4 = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} \frac{1}{x} * dx = \ln|x| \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} = \frac{3}{2} * \ln 2$$

P(A) = (1/2+3/2*ln2)/4 = 0,38

Задачи для самостоятельного решения.

1. Брошены два игральных кубика. Найти вероятности следующих событий: а) сумма выпавших очков равна семи; б) сумма выпавших очков равна восьми, а разность – четырем; в) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что их разность равна четырем; г) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение – четырем [1/6; 1/18; 1/2; 1/18].

2. В коробке шесть одинаковых занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того что номера кубиков появятся в порядке возрастания [1/720].

3. Отдел технического контроля обнаружил пять бракованных книг в партии из случайно отобранных 100 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг [0.05].

4. Внутрь круга наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника [$2/\pi$; $3\sqrt{3}/4\pi$].

5. На отрезке OA длины L числовой оси OX наудачу поставлены две точки: B(x) и C(y), причем $y \geq x$ (координата точки C для удобства решения обозначена через y). Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше длины отрезка OB [1/2]/

6. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t ($t<T$). Найти вероятность того, что сигнализатор срабатывает за время T, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу [$t(2T - t)/T^2$].

7. Умная игла (игла Бюффона).

Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 2a. На плоскость наудачу бросают иглу длины $2l$ ($l<a$). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую [$2l/\pi a$].

4. Элементы комбинаторики (перестановки; размещения, сочетания – без повторений).

При решении стохастических задач часто требуется составить из конечного множества элементов их различные комбинации (соединения), а также произвести подсчет числа всех возможных комбинаций, составленных по определенному закону. Такие задачи называются комбинаторными, а раздел математики, их изучающий, - комбинаторикой. Иногда этот раздел называется также математикой перечисления. Она основывается на следующем принципе.

Теорема (основной принцип перечисления).

Пусть множество A1 содержит n1 объектов, множество A2 – n2 объектов, ……, множество Am – nm объектов. Тогда число способов выбора по одному объекту от каждого множества равно произведению n1*n2*…….*nm.

Пример 1. Каждый из четырех потоков студентов выбирает по одному представителю в совет факультета. Каким числом способов это возможно сделать, если потоки насчитывают 55, 54, 51 и 47 студентов?

В соответствии с основным принципом перечисления: 55*54*51*47 = 7119090.

Предположим, что множество содержит n объектов (элементов). Нам часто необходимо расположить эти элементы в определенном порядке. Чтобы упорядочить n элементов, мы возьмем один элемент, который назовем “первый”, затем выбираем другой элемент – “второй” и т.д. Каждое упорядочение называется перестановкой.

Определение 1. Перестановка из n элементов есть упорядочение этих элементов, т.е. расположение этих n элементов в определенном порядке. (Иногда говорят: перестановки из n элементов – это такие их соединения, которые отличаются только порядком входящих в них элементов.)

Прежде чем обсуждать этот общий результат о числе перестановок из n элементов, введем одно понятие. Чтобы обозначить произведение

n*(n-1)*(n-2)*…..*4*3*2*1,

применяется символ n! (читается “эн фактериал”). Этот символ определен, когда n – целое положительное число (и притом n>1). Условимся, что по определению 0! = 1 и 1! = 1. Своим частым появлением в комбинаторных задачах символ “n!” обязан следующей теореме.

Теорема. Число перестановок из n-элементов есть n!.

Доказательство: Чтобы расположить n элементов в определенном порядке, выберем один элемент, который будет “первым”. Сделать этот выбор можно n способами. Из оставшихся (n-1) элементов выберем “второй” элемент. Для этого есть (n-1) способ. Повторяя этот процесс, заметим, что k – элемент можно выбрать (n-k+1) способами (при k = 1,2,3,…n). Тогда в силу основного принципа перечисления существует

n*(n-1)*(n-2)*…..3*2*1 = n!

перестановок из n элементов.

Пример 2. Сколькими способами можно выстроить в одну линию 8 человек?

Ответ: 8! = 1*2*3*4*5*6*7*8 = 40320

Замечание: число перестановок из n элементов обычно обозначается P_n. Тогда P_n = 8! = 40320.

Пример 3. Некто разбирает сложное радиотехническое устройство, состоящее из n узлов, и раскладывает эти узлы в произвольном порядке (не запоминая последовательность, в которой располагаются узлы), а затем снова собирает эти узлы. Какова вероятность того, что он получит то, что он разобрал?

Ответ: $P = 1/n!$

Очень часто нас интересуют возможные упорядочения не всех n элементов, а лишь некоторой их части (состоящей, например, из m элементов).

Определение 2. Размещением из n элементов по m элементов называются такие соединения m элементов, которые отличаются друг от друга самими элементами или их порядком.

Замечание: размещения из n элементов по m называются также перестановками из n элементов по m. Число размещений из n элементов по m обозначается A^m_n. Следующая теорема дает возможность подсчитать их число.

Теорема.

$$A^m_n = n!/(n-m)!$$

Доказательство:

Существует n способов выбора "первого" элемента, (n-1) способов выбора "второго" элемента, …. (n-k+1) способов выбора m элемента. Из основного принципа перечисления следует:

$n*(n-1)*(n-2)*….*(n-m+1) = n*(n-1)*….*(n-m+1)*(n-m)!/(n-m)! = n!/(n-m)!$

Пример 4. Сколькими способами можно составить подгруппу в 2 человека из группы в 8 человек, если в подгруппе требуется назначить старшего?

$A^2_8 = 8!/(8-2)! = 8!/6! = 7*8 = 56$

Пример 5. Нужно присудить первую, вторую и третью премию на конкурсе, в котором принимают участие 20 человек. Сколькими способами это возможно сделать?

$A^3_{20} = 20!/(20-3)! = 20!/17! = 18*19*20 = 6840$.

Пример 6. Сколько четырехбуквенных "слов" можно образовать из слова "теорема" (в "слове" нет одинаковых букв)?

$A^4_6 = 6!/(6-4)! = 6!/2! = 6*5*4*3 = 360$

В рассмотренных выше задачах нас интересовало число упорядочений множества элементов (всех элементов множества или некоторой его части). Однако легко указать и другие задачи, в которых порядок элементов не имеет значения. Например, можно заниматься выбором 100 человек из группы в 1000 человек для проведения некоторого эксперимента. Порядок, в котором выбирают этих людей, очевидно, безразличен. Нас скорее интересует число способов, которыми может быть выбрана группа в 100 человек. Чтобы понять, как это может быть вычислено, рассмотрим пример.

Пример 7. Из группы в 5 человек нужно выбрать трех, безотносительно к порядку выбора. Каким числом способов это возможно сделать?

Если бы порядок выбора людей был важен, то ответ есть $A^3_5 = 5!/(5-3)! = 5!/2! = 5*4*3 = 60$. Но среди этих 60 оказываются выбранными одни и те же люди. Обозначая людей через $Ч_1$, $Ч_2$, $Ч_3$, $Ч_4$, $Ч_5$, видим, что размещение $Ч_1Ч_2Ч_3$, $Ч_1Ч_3Ч_2$, $Ч_3Ч_1Ч_2$, $Ч_3Ч_2Ч_1$, $Ч_2Ч_3Ч_1$, $Ч_2Ч_1Ч_3$, соответствует одному и тому же выбору трех человек. Поэтому для определения числа различных выборов надо разделить A^3_5 на число перестановок из трех элементов P_3 = 3! = 6. Таким образом, число различных выборов трех (элементов) из пяти (элементов) есть 5!/(2!*3!) = 10. (Выписываю их в явном виде: $Ч_1Ч_2Ч_3$, $Ч_1Ч_2Ч_4$, $Ч_1Ч_2Ч_5$, $Ч_1Ч_3Ч_4$, $Ч_1Ч_3Ч_5$, $Ч_1Ч_4Ч_5$, $Ч_2Ч_3Ч_4$, $Ч_2Ч_3Ч_5$, $Ч_2Ч_4Ч_5$, $Ч_3Ч_4Ч_5$, убеждаемся, что это все различные выборы). Итак, мы приходим к важному определению и теореме:

Определение 3. Сочетаниями из n элементов по m, называются такие соединения из n элементов по m, которые отличаются друг от друга только самими элементами.

Обозначая число сочетаний из n по m как C^m_n и обобщая рассуждения предыдущего примера, приходим, к формуле:

$C^m_n = n!/((n-m)!*m!)$

Пример 8. Правление банка состоит из 12 человек. Минимальный кворум на заседаниях правления должен насчитывать 8 человек.

1. Сколькими способами может достигаться минимальный кворум?

2. Сколькими способами может достигаться какой-нибудь кворум?

$C^8_{12} = 12!/(4!*8!) = 12!/(4!*8!) = (9*10*11*12)/(1*2*3*4) = 495$

$C^8_{12}+ C^9_{12}+ C^{10}_{12}+ C^{11}_{12}+ C^{12}_{12} = 495+220+66+12+1 = 794$

Пример 9. Для полета на Марс необходимо укомплектовать следующий экипаж космического корабля: командир, 1-й помощник, 2-й помощник, 2 борт-инженера и 1 врач. Командная тройка может быть отобрана из числа 25 готовящихся к полету летчиков, 2 борт-инженера – из 20 специалистов соответствующего профиля и врач – из 8 медиков.

Каким числом способов можно укомплектовать экипаж исследователей космоса?

$A^3_{25}*C^2_{20}*C^1_8 = 20976000$

Практическое занятие № 2

Задача 1.

Курьеру поручено разнести пакеты в шесть различных пунктов. Сколько различных маршрутов он может выбрать?

$P_6 = 6! = 1*2*3*4*5*6 = 720$

Задача 2.

Из 12 человек необходимо отобрать подгруппу в 3 человека. Каким числом способов это можно сделать?

$C^3_{12} = 12!/(3!*(12-3)!) = 12!/(3!*9!) = (10*11*12)/(1*2*3) = 220$

Задача 3.

Некто, имея 5 знакомых, предполагает пригласить их в гости. Каким числом способов это возможно сделать?

$C^1_5+ C^2_5 + C^3_5 + C^4_5 + C^5_5 = 5+10+10+5+1 = 31$

Задача 4.

В библиотеке предлагают на выбор 3 книги и 4 журнала. Каким числом способов можно выбрать 3 экземпляра так, чтобы среди них было:

а) обязательно 2 книги;

б) не менее 2-х книг;

в) не более 2-х книг;

г) хотя бы один журнал.

а) $C^2{}_3 * C^1{}_4 = 3*4 = 12$;

б) $C^2{}_3 * C^1{}_4 + C^1{}_3 * C^2{}_4 = 12+1 = 13$;

в) $C^2{}_3 * C^1{}_4 + C^1{}_3 * C^2{}_4 + C^0{}_3 * C^3{}_4 = 12+18+4 = 34$;

г) $C^0{}_3 * C^3{}_4 + C^1{}_3 * C^2{}_4 + C^2{}_3 * C^1{}_4 = 34$.

"Продолжим" решение задачи 4, полагая, что нам надо определить вероятности событий указанных в пунктах а)-г).

Пусть событие А – "среди трех экземпляров обязательно две книги". Тогда число исходов, благоприятствующих этому событию, есть 12 (вычислено в пункте а); общее же число исходов опыта – единственно возможных и равновозможных – есть

$C^3{}_7 = 7!/(3!*4!) = (5*6*7)/(1*2*3) = 35$;

$P(A) = 12/35$

Пусть событие Б – "среди трех экземпляров не менее двух книг".

$P(Б) = 13/35$

Событие В – "среди трех экземпляров не более двух книг (или – что то же самое – хотя бы один журнал)

$P(В) = 34/35$

Задача 5.

В ящике 3 белых и 5 черных шаров. Из него извлекают 2 шара. Определить вероятность того, что а) оба шара белые; б) оба шара черные; в) шары разного цвета.

Пусть событие А – "оба шара белые"; число исходов благоприятствующих событию А (~А) есть $C^2{}_3 = 3!/(2!*1!) = 3$.

Общее число исходов

$C^2{}_8 = 8!/(2!*6!) = 7*8/(1!*2!) = 28$;

$P(A) = 3/28$

Пусть событие Б – "оба шара черные"; тогда

$P(Б) = C^2{}_5/ C^2{}_8 = 5!/(2!*3!):28 = ((4*5)/2):28 = 10/28 = 5/14$.

Пусть событие В – "оба шара разного цвета";

$P(В) = (C^1{}_5 * C^3{}_8)/C^2{}_8 = (5*3)/28 = 15/28$

Замечание: $P(A)+P(Б)+P(В) = 3/28+10/28+15/28 = 28/28 = 1$.

Задача 6.

В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных ровно k стандартных.

Решение: Общее число исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь m деталей из N деталей, то есть C^m_N – число сочетаний из N по m. Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди деталей ровно k стандартных): k стандартных деталей можно взять из n стандартных C^k_n способами; при этом остальные $(m\text{-}k)$ деталей должны быть нестандартными; взять же $(m\text{-}k)$ нестандартных деталей из $(N\text{-}n)$ нестандартных деталей можно C^{m-k}_{N-n} способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C^k_n * C^{m-k}_{N-n}$.

Итак:

$P = (C^k_n * C^{m-k}_{N-n})/C^m_N$

<u>Задача 7.</u>

В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных окажутся 3 женщины.

$P = (C^3_4 * C^4_6)/C^7_{10} = 1/2 = 0{,}5$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными [24/91].

2. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены 4 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных [$\approx$ 0.65; $\approx$ 0.00005].

3. Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры [1/720].

4. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников [14/55].

5. Из группы в 10 мужчин и 10 женщин нужно выбрать 10 человек. а) Каково число способов выбора 10 человек? б) Каково число способов, при которых выбирается больше мужчин, чем женщин? в) Каково число способов выбора 10 человек, если по крайней мере 8 из них должны быть женщинами? [C^{10}_{20}; $C^6_{10}*C^4_{10} + C^7_{10}*C^3_{10} + C^8_{10}*C^2_{10} + C^9_{10}*C^1_{10} + C^{10}_{10}*C^0_{10}$; $C^8_{10}*C^2_{10} + C^9_{10}*C^1_{10} + C^{10}_{10}*C^0_{10}$].

5. Алгебра событий (сумма и произведение событий)

Определение 1. Событие С называется суммой событий (объединением событий) А и В, если оно состоит в появлении или события А, или события В, или обоих событий одновременно.

Обозначение: $C = A+B \quad C = A\cup B$.

Пример 1. Рассмотрим в качестве опыта стрельбу по мишени; событие А – “Попадание в 10”; событие В – “Попадание в 9”, тогда событие $C = A+B$ – “выбить одним выстрелом не менее 9 очков”.

Пример 2. Опыт – “стрельба двумя выстрелами в мишень”.

Событие А – “попадание в цель при первом выстреле”;

событие В - “попадание в цель при втором выстреле”;

событие С - “попадание в цель при первом, или втором, или при обоих выстрелах”:

$C = A+B$.

Замечание: сумма $C = A+B$ несовместных событий А и В заключается в появлении или события А, или события В.

Понятие суммы событий можно обобщить на любое число слагаемых

$$C = \sum_{I=1}^{n} A_i$$

Теорема: Сумма событий полной группы есть событие достоверное.

Доказательство: по определению полной группы событий, она есть совокупность событий, одно из которых появится обязательно, а сумма несовместных событий заключается в появлении одного из них.

Пример 1. Рассмотрим в качестве опыта “выстрел по мишени”, событие А – “попадание в цель”, событие $\bar{A}$ – “промах” (А и $\bar{A}$ противоположные события); тогда $A+\bar{A}$ – событие достоверное.

Пример 2. Рассмотрим ситуации, которые возможны при обнаружении радиолокационной цели. Заметим, что в процессе обнаружения радиолокационной цели должно быть выдано решение о ее наличии или отсутствии. Решение может быть принято при двух взаимно исключающих друг друга условиях: условие А – “цель есть”, условие $\bar{A}$ – “цели нет”, причем при выработке решения эти условия неизвестны. За счет помех и других причин любому условию соответствуют два вида решений: A^* - “есть цель”, $\bar{A}^*$ - “цели нет”. Таким образом, возможны следующие ситуации совмещения случайных событий “решение” и “условие”:

1. A^*A (правильное обнаружение)
2. $A^*\bar{A}$ (ложная тревога)
3. $\bar{A}^*A$ (пропуск цели)
4. $\bar{A}^*\bar{A}$ (правильное необнаружение)

Указанные ситуации образуют полную группу событий: а тогда:

$A^*A+A^*\bar{A}+\bar{A}^*A+\bar{A}^*\bar{A}$ достоверное событие.

Определение 2. Событие С называется произведением событий (пересечением событий) А и В, если оно заключается в одновременном появлении и события А, и события В.

Обозначение: $C = A \cdot B$; $C = A \cap B$.

Понятие произведения событий можно обобщить на любое число сомножителей:

$$C = \prod_{I=1}^{n} A_\iota$$

Пример 1. Рассмотрим в качестве опыта извлечение двух шаров из ящика, где находятся 3 белых и 5 черных шаров.

Событие A – "появление белого шара при извлечении первого шара".

Событие B – "появление белого шара при извлечении второго шара".

Тогда $C = A \cdot B$ – "появление двух первых шаров подряд".

Пример 2. Производится три выстрела по цели. Обозначим события:

A_1- "попадание при первом выстреле";

$\bar{A}_1$- "промах при первом выстреле";

A_2- "попадание при втором выстреле";

$\bar{A}_2$- "промах при втором выстреле";

A_3- "попадание при третьем выстреле";

$\bar{A}_3$- "промах при третьем выстреле".

Составим события:

C – "нет ни одного попадания при трех выстрелах";

$C = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$;

K- "при трех выстрелах ровно одно попадание";

$K = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$;

F – "при трех выстрелах не менее двух попаданий";

$F = A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$;

L = "при трех выстрелах не более одного попадания";

$L = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 = K + C$;

E – "при трех выстрелах не менее одного попадания";

$E = K + F$.

6. Теоремы сложения вероятностей событий

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$P(A+B) = P(A)+P(B)$, если A и B – несовместны.

Доказательство (для классического определения вероятности):

Если A и B – несовместны, то событие A+B заключается в появлении или события A, или события B. Обозначим:

n - общее число всех равно возможных исходов опыта, образующих полную группу;

m_1 – число исходов, благоприятствующих событию A (m_1~A);

($m_1 + m_2$)~ (A+B); m_2~B;

$P(A+B) = (m_1 + m_2)/ n = m_1/ n+ m_2/ n = P(A)+P(B)$;

$P(A+B) = P(A)+P(B)$.

Доказанную теорему можно обобщить на любое конечное число несовместных событий:

$$P(\sum_{I=1}^{n} A_i) = \sum_{I=1}^{n} P(A_i) \quad ,$$

Если A_i – попарно несовместны (i = 1, 2, … n).

Следствие 1.

Сумма вероятностей событий полной группы есть 1.

$$P(\sum_{I=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 \ ,$$

если A_i (i = 1,2,… n) образуют полную группу (так как события полной группы попарно несовместны).

Пример. В ситуациях обнаружения радиолокационной цели имеем:

$P(A*A)+P(A*\bar{A})+P(\bar{A}*A)+P(\bar{A}*\bar{A}) = 1$

Следствие 2.

Сумма вероятностей противоположных событий есть 1 (так как противоположные события образуют полную группу).

$A+\bar{A}$ есть достоверное событие.

$$\underbrace{P(A+\bar{A})}_{=1} = \underbrace{P(A)}_{=p}+\underbrace{P(\bar{A})}_{=q} \qquad p+q = 1 \qquad p = 1-q$$

Пример 1. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на три области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую – 0,35. Найти вероятность того, что стрелок попадет в первую область или во вторую область.

Событие A – “попадание в первую область”;

событие B – “попадание во вторую область”;

событие (A+B) – “попадание или в первую, или во вторую область”.

$P(A+B) = P(A)+P(B)$

$P(A+B) = 0{,}45+0{,}35 = 0{,}80$.

Пример 2. В ящике 8 радиодеталей, из которых три стандартных. Определить вероятность того, что среди двух наудачу извлеченных деталей хотя бы одна стандартная.

событие A – “среди двух наудачу извлеченных деталей хотя бы одна стандартная”;

событие $\bar{A}$ – “среди двух наудачу извлеченных деталей нет ни одной стандартной”.

$P(\bar{A}) = (C^2{}_5)/(C^2{}_8) = 10/28 = 5/14$;

$P(A) = 1- 5/14 = 9/14$

<u>Пример 3.</u> В аквариум, где содержится 3 рыбы: A, B и C; время от времени помещают кусочки пищи. Каждый раз, когда бросают кусочек, рыбы конкурируют за него. За длительный период наблюдения установлено, что A или B добивались успеха в течение 1/2 времени наблюдения, а A или C – в течение s времени наблюдения. Какова вероятность того, что успеха добивается A? B? C? Какая из рыб лучше накормлена?

Решение: Обозначим

событие A – “пища достается рыбе A”;

событие B – “пища достается рыбе B”;

событие C – “пища достается рыбе C”.

Так как каждый кусочек пищи достается лишь одной из рыб, то $P(A\cdot B) = P(A\cdot C) = P(B\cdot C) = 0$. Из условия ясно, что $P(A+B) = 1/2$; $P(A+C) = 3/4$. Кроме того, A+B+C есть событие достоверное; а тогда

$P(A)+P(B)+P(C) = 1$

Итак, имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$P(A)+P(B)+P(C) = 1$

$P(A)+P(B) = 1/2$

$P(A+C) = P(A) + P(C) = 3/4$

Откуда $P(A) = P(B) = 1/4$; $P(C) = 1/2$..

Следовательно, рыбе C достается пищи вдвое больше, чем каждой из двух других.

В заключение этого пункта укажем – без доказательства – теорему сложения вероятностей совместных событий:

$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$.

7. Зависимые и независимые события. Условная вероятность события. Теорема умножения вероятностей событий

<u>Пример 1.</u> Рассмотрим в качестве опыта подбрасывание двух монет; в качестве события A – “появление цифры на первой монете”, события B – “появление цифры на второй монете”. Ясно, что вероятность события B не меняется в зависимости от того, имело место событие A или нет. Событие B, говорят в таких случаях, не зависит от события A.

Пример 2. В ящике находятся 8 шаров: 3 белых и 5 черных. Рассмотрим в качестве опыта "извлечение из ящика двух шаров двумя участниками наудачу, причем каждый извлекает по одному шару".

Событие А – "извлечение белого шара первым участником";

событие В – "извлечение белого шара вторым участником".

Вероятность события В зависит в данном случае от того, имело место событие А или нет.

Определение 1. Событие А называется зависимым от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет. Если указанная вероятность не меняется, то событие А не зависит от события В.

Определение 2. Вероятность события А, вычисленная при условии, что событие В имело место, называется условной вероятностью события А.

Обозначение:

$P(A/B)$ – условная вероятность события А, вычисленная при условии, что имело место В;

$P(A/B) = P(A) \Leftrightarrow$ А не зависит от В;

$P(A/B) \neq P(A) \Leftrightarrow$ А не зависит от В;

Теорема умножения вероятностей событий

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что имело место первое событие.

$P(A{\cdot}B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Доказательство (для классического определения вероятности):

Пусть опыт имеет n единственно возможных и равновозможных исходов, из которых m исходов ~ А, k исходов ~ В. Так как несовместимость событий А и В не предполагается, то существуют исходы, благоприятствующие и событию А, и событию В, то есть $A{\cdot}B$ (пусть их число l). Итак:

m~A $\qquad$ k~B $\qquad$ l~ $A{\cdot}B$

$P(A) = m/n \qquad P(B) = k/n \qquad P(A{\cdot}B) = l/n$

При вычислении условий вероятности $P(A/B)$ учтем, что исходов, содержащих событие В, всего k, из них благоприятствуют событию А l исходов, отсюда

$P(A/B) = l/k$, аналогично $P(B/A) = l/m$.

$P(A{\cdot}B) = l/n = l/n{\cdot}k/k = l/k{\cdot}k/n = P(A/B) \cdot P(B)$;

$P(A{\cdot}B) = l/n = l/n{\cdot}m/m = l/m{\cdot}m/n = P(B/A) \cdot P(A)$;

$P(A{\cdot}B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Следствие 1. Если А не зависит от В, то и В не зависит от А.

Доказательство: пусть А не зависит от В, тогда $P(A/B) = P(A) \neq 0$.

$P(A{\cdot}B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$;

$P(B/A) = P(B) \Leftrightarrow$ В не зависит от А.

Следовательно, зависимость или независимость событий всегда взаимны, поэтому можно дать другое определение независимости событий.

Определение 3. Два события называются независимыми, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого (и зависимыми, если меняет).

Понятие независимости событий можно обобщить на случай произвольного числа событий.

Определение 4. Несколько событий называются независимыми, если любое из них не зависит от любой совокупности остальных.

Следствие 2. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, если A и B – независимы.

Доказательство: $P(A/B) = P(A)$

$P(A \cdot B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$

Теорему умножения вероятностей можно обобщить на случай любого конечного числа событий.

Теорема. Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность любого следующего по порядку события вычислена при условии, что все предыдущие имели место:

$P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/ A_1) \cdot P(A_3/ A_1 A_2) \ldots P(A_n/ A_1 \ldots A_{n-1})$.

Для независимых событий теорема упрощается:

$P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_{n-1}) \cdot P(A_n)$.

Пример1. Пусть в ящике 3 белых и 5 черных шаров. Рассмотрим в качестве опыта извлечение двух шаров (наудачу).

Событие A_1 - “появление белого шара при извлечении первого шара”;

Событие A_2 - “появление белого шара при извлечении второго шара”.

Тогда событие A_1A_2 – “появление двух белых шаров подряд”.

$P(A_1A_2) = P(A_1)*P(A_2/A_1) = 3/8*2/7 = 3/28$

Мы имеем известный нам результат, который ранее был получен на основе классического определения вероятности с помощью комбинаторного анализа.

Пример 2. Прибор состоит из трех узлов, каждый из которых независимо от других может выйти из строя (во время работы прибора). Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. Надежность первого узла (вероятность безотказной работы) есть 0,8; второго – 0,9; третьего – 0,7. Найти надежность прибора в целом.

Обозначим:

событие A – “безотказная работа прибора”;

событие A_1– “безотказная работа 1 узла”;

событие A_2 – “безотказная работа 2 узла”;

событие A_3 – “безотказная работа 3 узла”.

Ясно, что события A_1, A_2, A_3 – независимые.

$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$;

$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$;

$P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}504$

Пример 3. Производится три выстрела по мишени. Вероятность попадания при первом выстреле 0,4; при втором – 0,5; при третьем – 0,7. Найти вероятность того, что после трех выстрелов в мишени будет ровно одно попадание.

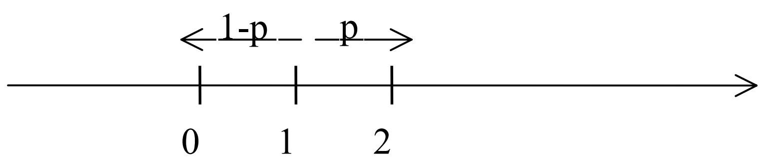
Событие А – “после трех выстрелов в мишени ровно одно попадание”.

$A = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$;

$P(A) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3)$;

$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}36$.

Пример 4. Этот пример [10, с.16] имеет много формулировок и много трактовок. Рассмотрим пока его как задачу о частице, движущейся по оси, причем частицу предполагаем сначала находящейся в положении $x = 1$ (на оси).



Частица движется из положения $x = 1$ либо в точку $x = 2$ с вероятностью ρ, либо в точку $x = 0$ с вероятностью $1-\rho$. Вообще: если частица находится в положении $x = n$ (n - натуральное число), то она сдвигается либо в точку $x = n+1$ с вероятностью ρ, либо $x = n-1$ с вероятностью $1-\rho$. Если частица попадает в положение $x = 0$, то там она поглощается.

Пусть ρ_1 - вероятность того, что частица поглощается в точке $x = 0$ после того, как она выходит из точки $x = 1$. Ясно, что ρ_1 зависит от ρ. Представляется естественным, что если ρ близко к 1, то вероятность ρ_1 мала, а если ρ близко к нулю, то ρ_1 мало отличается от 1.

Рассмотрим ситуацию после первого шага: либо точка сдвинулась налево, попала в точку $x = 0$ и там поглотилась (вероятность этого события 1- p), либо сдвинулась направо в точку $x = 2$ (вероятность этого события ρ). Пусть ρ_2 – вероятность того, что частица поглощается в начале координат, т.е. в точке $x = 0$, если она выходит из точки $x = 2$. Тогда

$$\rho_1 = 1-\rho+\rho \cdot \rho_2 \qquad (1)$$

Здесь $(1-\rho)$ есть вероятность поглощения на первом шаге и $\rho \cdot \rho_2$ - вероятность поглощения на следующих шагах.

Каждый путь, ведущий к поглощению из точки x = 2, можно разбить на 2 части:

(1) Путь, идущий из x = 2 и достигающий положения x = 1 в первый раз (не обязательно за один шаг) и

(2) Путь, идущий из точки x = 1 в точку x = 0 (также не обязательно за один шаг).

Вероятность пути из x = 2 в x = 1 есть ρ_1, т.к. структура блуждания здесь идентична структуре начального блуждания (из x = 1 в x = 0), за исключением того, что начало координат переносится на один шаг направо. Вероятность попадания из точки x = 1 в точку x = 0 есть ρ_1 (что оговорено ранее). Следовательно, $\rho_2 = \rho_1 * \rho_1$ (т.к. события A - “частица идет по пути от точки x = 2 к точке x = 1” и B – “ частица идет по пути от точки x = 1 к точке x = 0” – независимы и P(A) = P(B) = ρ_1).

Тогда $\rho_1 = 1-\rho+\rho*\rho_1*\rho_1$

$$\rho*\rho_1*\rho_1-\rho_1+1-\rho=0$$

$$\rho_1*\rho_1-\rho_1/\rho+(1-\rho)/\rho=0 \tag{1'}$$

Используя одну из теорем Виета, имеем следующие два решения квадратного уравнения (1’):

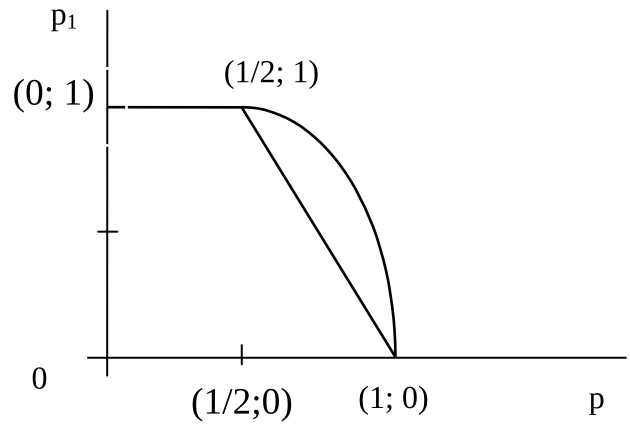
$$\rho_1 = 1 \qquad \rho_1 = (1-\rho)/\rho \tag{2}$$

Одно (или оба!) этих решения могут быть подходящими (в зависимости от значения ρ: $0\le\rho\le1$). Заметим, что значение $\rho = 1/2$ является условно говоря, “знаковым”: если $\rho = 1/2$, то оба решения совпадают; $\rho_1 = 1$. Если $p = 1$, то $p_1 = 0$ (так как частица всегда движется вправо). Если $\rho = 0$, то $\rho_1 = 1$. При $\rho<1/2$ второе решение не подходит, т.к. тогда $(1-\rho)/\rho>1$, а по смыслу задачи $\rho_1<1$. Поэтому при $0\le\rho\le1/2$ имеем $\rho_1 = 1$.

Чтобы показать, что второе решение $\rho_1 = (1-\rho)/\rho$ имеет место при $\rho>1/2$, достаточно установить, что ρ_1- непрерывная функция от ρ. Предполагая эту непрерывность (но не доказывая ее!), заметим, что график функции начинается в точке $\rho = 1/2$; $\rho_1 = 1$; он должен “спуститься” к точке (1;0), а ордината любой точки графика функции должна равняться 1 или $(1-\rho)/\rho$. График не будет иметь разрывов только тогда, когда при $\rho>1/2$ соответствующее значение есть $(1-\rho)/\rho$. Таким образом, можно заметить:

$$p_1 = \left\{ \begin{array}{c} 1;\ 0 \le p \le \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1-p}{p};\ \frac{1}{2} < p \le 1 \end{array} \right\}$$

График функции ρ_1 приведен ниже:



Приведем другое истолкование рассмотренной только что “задачи о блуждании”. Рассмотрим игрока с начальным капиталом x = 1, играющего неограниченно долго против казино с бесконечным капиталом в “безобидную” игру ($\rho = 1/2$), при которой он выигрывает или проигрывает единицу в каждом туре. Он наверное обанкротится ($\rho_1 = 1$). Чтобы он не стал банкротом с вероятностью 1/2, должно быть $\rho = 2/3$.

Замечание: факт, что банкротство неизбежно при $\rho = 1/2$, является неожиданным для большинства из нас. Обычно считают, что если отдельные партии “безобидны” (средняя потеря равна нулю), то вся игра безобидна. Другой удивительный факт состоит в том, что при $\rho = 1/2$ среднее число шагов, требуемое для поглощения, бесконечно.

8. Формула полной вероятности события

Пусть требуется определить вероятность некоторого события A, которое может произойти одновременно с одним из событий $H_1, H_2, \ldots H_n$, образующих полную группу событий. Тогда $H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \ldots + H_n \cdot A = A$. Любое из слагаемых левой части несовместно со всеми остальными; следовательно:

$P(H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \ldots + H_n \cdot A) = P(H_1 \cdot A) + P(H_2 \cdot A) + \ldots + P(H_n \cdot A) = = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n) = P(A)$.

$$P(A) = \sum_{I=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

- формула полной вероятности события A.

Замечание: события $H_1, H_2, \ldots H_n$, образующие полную группу, называются гипотезами.

Пример 1. Имеются 3 одинаковых на вид клетки (“темных”). В первой клетке находятся 2 белых и 1 черная мыши; во второй – 3 белых и 1 черная мыши; в третьей клетке находятся 2 белых и 2 черных мыши. Некто выбирает наугад одну из клеток и извлекает из нее наугад мышь. Определить вероятность того, что извлеченная мышь – белая.

Решение: событие A – “извлеченная мышь белая”

H_1- “выбрана 1 клетка” $P(H_1) = 1/3$ $P(A/H_1) = 2/3$

H_2- “выбрана 2 клетка” $P(H_2) = 1/3$ $P(A/H_2) = 3/4$

H_3- “выбрана 3 клетка” $P(H_3) = 1/3$ $P(A/H_3) = 2/4 = 1/2$

$P(A) = 1/3 \cdot 2/3+1/3 \cdot 3/4+1/3 \cdot 1/2 = 23/36$.

Пример 2. По самолету производится 3 ракетных выстрела с вероятностью попадания соответственно 0,4; 0,5; 0,7. Для вывода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий; при двух попаданиях он выходит из строя с вероятностью 0,6; при одном – с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет выведен из строя.

Решение: событие А – “самолет выведен из строя”.

Составим гипотезы:

H_0 - “при трех выстрелах 0 попаданий”;

H_1- “при трех выстрелах 1 попадание”;

H_2- “при трех выстрелах 2 попадания”;

H_3- “при трех выстрелах 3 попадания”.

$P(H_0) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$;

$P(H_1) = 0{,}36$ (см. предыдущий пункт);

$P(H_2) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3+A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3+ \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \ldots = 0{,}41$;

$P(H_3) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \ldots = 0{,}14$.

Контроль: $P(H_0)+ P(H_1)+P(H_2)+P(H_3) = 0{,}09+0{,}36+0{,}41+0{,}14 = 1$;

$P(A/ H_0) = 0$; $P(A/ H_1) = 0{,}2$; $P(A/H_2) = 0{,}6$; $P(A/H_3) = = 1$;

$P(A) = 0{,}09 \cdot 0+0{,}36 \cdot 0{,}2+0{,}41 \cdot 0{,}6+0{,}14 \cdot 1 = 0{,}458$.

Пример 3. Игра в “крэпс” [10, с. 9].

Игра в “крэпс”, для которой нужна только пара игральных кубиков и не очень много времени, - одна из популярнейших в Америке. С ней связана весьма поучительная задача.

Правила игры в “крэпс” такие. Игрок бросает два кубика и подсчитывает сумму выпавших очков. Он сразу же выигрывает, если эта сумма равна 7 или 11, и проигрывает, если она равна 2, 3 или 12. Всякая другая сумма – это его “пойнт”. Если в первый раз выпадает “пойнт”, то игрок бросает кубики до тех пор, пока он или не выиграет, выбросив свой “пойнт”, или не проиграет, получив сумму очков, равную 7 (обратите внимание на “двойную роль” семерки в этой игре!). Какова вероятность выигрыша игрока?

Решение:

Очевидно, что если X - сумма выпавших очков, то X может принимать значения от 2 до 12. Подсчитаем вероятности принятия величиной X того или иного значения. Составим следующую таблицу:

		Кубик № 1					
		1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
Кубик № 2	3	4	5	6	7	8	9

4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

В клетках указана соответствующая сумма очков.

Простой подсчет дает следующее соотношение между возможными значениями x_i суммы X и вероятностями принятия величиной X этих возможных значений (заметим, что подбрасывание двух кубиков имеет 6х6 = 36 равновозможных исходов, которые и приведены в указанной выше таблице).

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Введем в рассмотрение события:

A – выигрыш Игрока

B – выигрыш Игрока после первого броска

C – выигрыш Игрока при последующих бросках

События B и C – несовместны, $A = B+C$;

$P(A) = P(B)+P(C)$

$P(B) = P(X = 7)+P(X = 11) = 6/36+2/36 = 8/36 = 2/9 \sim 0{,}22222$

Игрок выиграет при последующих бросках, если он наберет свой “пойнт” (в качестве “пойнта” он может иметь 4, 5, 6, 8, 9, или 10 очков – вот Вам 6 гипотез). Если “пойнт” Игрока равен 4, то существует 3 возможных способа их появления и 6 способов появления “семерки”. Следовательно, условная вероятносить выбросить “пойнт” (= 4 в данном случае) есть $3/(3+6) = 3/9$. Аналогично находятся условные вероятности для других значений “пойнта”:

$4: 3/(3+6) = 3/9$ $\quad$ $8: 5/(5+6) = 5/11$

$5: 4/(4+6) = 4+10$ $\quad$ $9: 4/(4+6) = 4/10$

$6: 5/(5+6) = 5/11$ $\quad$ $10: 3/(3+6) = 3/9$

Применяя формулу полной вероятности, получили:

$P(B) = (3/36) \cdot (3/9) + (4/36) \cdot (4/10) + (5/36) \cdot (5/11) + (5/36) \cdot (5/11) + (4/36) \cdot (4/10) + (3/36) \cdot (3/9) = \ldots \sim 0{,}27071$

$P(A) = 0{,}22222+0{,}27071 \sim 0{,}49293$

Тогда вероятность проигрыша Игрока есть $1- 0{,}49293 \sim 0{,}50707$

Следовательно, средний ущерб Игрока есть $0{,}50707- 0{,}49293 = 0{,}01414$ или 1,414%.

Считается, что это наиболее справедливая игра без стратегии, которая практикуется в игральных домах (казино).

9. Теорема о переоценке вероятностей гипотез (формула Байеса)

Пусть имеется полная группа событий (гипотез), вероятности которых до опыта известны, и есть $P(H_1)$, $P(H_2)$, …., $P(H_n)$. Пусть производится опыт, в результате которого появилось некоторое событие А. Как переоценить в связи с появлением события А вероятность любой из гипотез, то есть определить условные вероятности $P(H_i/A)$, $i = 1,2,\dots n$?

$P(A\cdot H_i) = P(A)\cdot P(H_i/A) = P(H_i)\cdot P(A/H_i)$;

$P(H_i/A) = (\ P(H_i)\cdot P(A/H_i))/P(A)$

формула переоценки вероятностей гипотез (формула Байеса).

Вернемся к примеру 2 предыдущего пункта и будем считать, что событие А – "самолет выведен из строя" – имело место. Вероятнее всего, сколько попаданий при этом было (при трех выстрелах)?

$P(H_0/A) = (0{,}09\cdot 0)/0{,}458 = 0$;
$P(H_1/A) = (0{,}36\cdot 0{,}2)/0{,}458\sim 0{,}157$;
$P(H_2/A) = (0{,}41\cdot 0{,}6)/0{,}458\sim 0{,}537$;
$P(H_3/A) = (0{,}14\cdot 1)/0{,}458\sim 0{,}306$;

Замечание:

$$\sum_{i=0}^{3} P(H_i/A) = 1$$

Ответ: вероятнее всего, было 2 попадания ракет.

Практические занятия № 3, № 4.

Задача 1

На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

Решение.

1 способ. Обозначим: событие А – "хотя бы один из учебников (взятых) в переплете". Это требование осуществлено, если имеет место любое из следующих трех несовместных событий:

В – один учебник в переплете; К- два учебника в переплете;

Д – три учебника в переплете. Итак:

А = В+К+Д;

Р(А) = Р(В+К+Д) = Р(В)+Р(К)+Р(Д);

$P(B) = (C^1_5\cdot C^2_{10})/C^3_{15} = 45/91$

$P(K) = (C^2_5\cdot C^1_{10})/C^3_{15} = 20/91$

$P(Д) = (C^3{}_5 \cdot C^0{}_{10})/C^3{}_{15} = 2/91$

$P(A) = 45/91+20/91+2/91 = 67/91$

2 способ. События А – “хотя бы один из трех взятых учебников в переплете” и Ā – “ни один из трех взятых учебников не имеет переплета” – противоположные, поэтому $P(A)+P(\bar{A}) = 1$,

но $P(\bar{A}) = (C^3{}_{10} \cdot C^0{}_5)/C^3{}_{15} = 24/91$

Тогда $P(A) = 1-24/91 = 67/91$.

Задача 2.

Вероятности появления каждого из двух независимых событий A_1 и A_2 соответственно P_1 и P_2. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

Решение.

Обозначим А – появление только одного из двух событий;

A_1 - появление только события A_1;

A_2 - появление только события A_2;

Тогда $A = A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2$, причем слагаемые в этой сумме – события несовместные.

$P(A) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2)+P(\bar{A}_1 \cdot A_2)$.

Так как A_1 и A_2 независимы, то независимы и A_1 и $\bar{A}_2$, а также $\bar{A}_1$ и A_2. Следовательно:

$P(A) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2)+P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2)$;

$P(A) = P_1q_2+P_2q_1$.

Задача 3.

Для сигнализации об аварии установлены два сигнализатора (работающих независимо друг от друга). Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Решение: $P = 0{,}95 \cdot 0{,}1+0{,}9 \cdot 0{,}05 = 0{,}14$.

Задача 4.

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка 0,7; для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Решение: $P = 0{,}7 \cdot 0{,}2+0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}38$.

Задача 5.

Имеются две партии однотипных изделий. Первая содержит 8 годных и 2 дефектных изделия, вторая соответственно 9 и 1. Из наугад взятой партии наудачу выбирают 3 изделия. Найти вероятность того, что все они являются годными.

Решение: событие А – “все 3 изделия – годные”

H_1 - “взята первая партия” $P(H_1) = 1/2$

H_2 – “взята вторая партия” $P(H_2) = 1/2$

$P(A/H_1) = (8/10) \cdot (7/9) \cdot (6/8) = 7/15$

$P(A/H_2) = (9/10) \cdot (5/9) \cdot (7/8) = 7/10$

$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1)+ P(H_2) \cdot P(A/H_2)$

$P(A) = (1/2) \cdot (7/15)+(1/2) \cdot (7/10) = 7/12$

Задача 6.

В ящике находятся 2 белых и 4 черных шара. Из ящика наугад извлекают 2 шара и, не глядя на них, затем еще один шар. Найти вероятность того, что третий шар белый.

Решение:

Событие А – третий шар белый

H_1 – “первые 2 шара белые” $P(H_1) = (2/6) \cdot (1/5) = 1/15$

H_2 – “первые 2 шара черные” $P(H_2) = (4/6) \cdot (3/5) = 6/15$

H_3 – “первые 2 шара разного цвета” $P(H_3) = 1- (1/15+6/15) = 8/15$

$P(A/H_1) = 0$ $P(A/H_2) = 2/4 = 1/2$ $P(A/H_3) = 1/4$

$P(A) = ((1/15) \cdot 0) + ((6/15) \cdot (1/2)) + ((8/15) \cdot (1/4)) = 1/3.$

Задача 7.

В ящик, содержащий 2 шара, опущен белый шар, после чего из него наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар белый, если равновозможны все предложения о первоначальном составе шаров (по цвету).

Решение:

Событие А – “извлеченный шар белый”

H_1 – “белых шаров нет” $P(H_1) = \cdot 1/3$

H_2 – “один шар белый” $P(H_2) = 1/3$

H_3 – “два шара белые” $P(H_3) = 1/3$

$P(A/H_1) = 1/3$ $P(A/H_2) = 2/3$ $P(A/H_3) = 3/3 = 1$

$P(A) = ((1/3) \cdot (1/3))+((1/3) \cdot (2/3))+((1/3) \cdot 1) = 2/3$

Задача 8.

Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение:

Событие А – “деталь отличного качества”

H_1 – “деталь произведена 1 автоматом” $P(H_1) = \cdot 2/3$

H_2 – “деталь произведена 2 автоматом” $P(H_2) = 1/3$
$P(A/H_1) = 0,6$ $P(A/H_2) = 0,84$
$P(A) = ((2/3) \cdot 0,6)+((1/3) \cdot 0,84) = 0,68$;
$P(H_1/A) = ((2/3) \cdot 0,6)/0,68 = 10/17$

Задача 9.

В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

Решение:
Событие А – “стрелок поразил мишень”
H_1 – “стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом”
H_2 – “стрелок стрелял из винтовки без оптического прицела”
$P(H_1) = 4/10 = 0,4$
$P(H_2) = \cdot 6/10 = 0,6$
$P(A/H_1) = 0,95$ $P(A/H_2) = 0,8$
$P(A) = (0,4 \cdot 0,95)+(0,8 \cdot 0,6) = 0,38+0,48 = 0,86$
$P(H_1/A) = (0,4 \cdot 0,95)/0,86 = 0,38/0,86 = 19/43$
$P(H_2/A) = (0,8 \cdot 0,6)/0,86 = 0,48/0,86 = 24/43$
Ответ: вероятнее, что винтовка была без оптического прицела (24/43>19/43).

Задачи для самостоятельного решения

1. В группе 10 студентов, среди которых 4 отличника. На занятии к доске вызывают 3 студентов. Найти вероятность того, что среди них хотя бы один отличник. [5/6].

2. Подбрасываются две монеты. Рассматриваются: событие А – “появление цифры на 1 монете”; событие В – “ появление цифры на 2 монете”. Найти вероятность события С = А+В. [3/4].

3. Игральный кубик подброшен 3 раза. Найти вероятность того, что все три раза выпадет 2 очка. [$1/6^3$].

4. В ящике <u>*а*</u> белых и <u>*в*</u> черных шаров. Из ящика взяли (одновременно или последовательно) два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые. [a(a-1)/(a+b)(a+b-1)].

5. В ящике <u>*а*</u> белых и <u>*в*</u> черных шаров. Из ящика взяли (одновременно или последовательно) два шара. Найти вероятность того, что они разного цвета. [2ab/(a+b)(a+b-1)].

6. Монету бросают *n* раз. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится цифра. [$1-1/2^n$].

7. Студент изучает химию, математику и биологию. Он оценивает, что вероятность получить “отлично” по этим курсам соответственно 1/2, 1/3, и 1/4. В предположении, что оценки студента по трем дисциплинам независимы, какова вероятность, что он не получит ни одной пятерки? Получит пятерку только по химии? [1/4; 1/4].

8. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе № 1, 20 деталей – на заводе № 2, 18 деталей – на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе № 1, отличного качества, есть 0,9; для деталей с заводов № 2 и № 3 эти вероятности составляют 0,6 и 0,8 (соответственно). Найти вероятность того, что деталь, извлеченная из ящика наудачу окажется отличного качества. [0,78].

9. В первом ящике содержится 10 шаров, из них 8 белых; во втором – 20, из которых 4 белых. Из каждого ящика наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Какова вероятность того, что он белый? [0,5].

10. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием К, 30% с заболеванием Z, 20% с заболеванием М. Вероятность полного излечения болезни К равна 0,7; для болезней Z и М эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, выписан здоровым. Найти вероятность того, что больной страдал заболеванием К. [5/11].

Глава II. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Дискретная случайная величина. Закон распределения дискретной случайной величины

Определение 1. Величина называется случайной, если она в результате опыта принимает одно из своих возможных значений, заранее неизвестно, какое именно.

Случайные величины принято обозначать Z; V; X; ...., а возможные значения (в последнем случае, например): x_1; x_2; ...; x_n; ... .

Определение 2. Случайная величина называется дискретной, если ее возможные значения можно перенумеровать (т.е. поставить во взаимно-однозначное соответствие с отрезком натурального ряда чисел или всем натуральным рядом чисел).

Пример. Пусть X - число попаданий в мишень при 3-х выстрелах. Ясно, что X - случайная величина, возможные значения которой: 0, 1, 2, 3. И, следовательно, это еще и дискретная случайная величина.

Определение 3. Законом распределения дискретной случайной величины (ДСВ) называется всякое соотношение, указывающее связь между возможными значениями ДСВ и вероятностями принятия дискретной СВ этих возможных значений.

Возвращаясь к предыдущему примеру, где X - число попаданий в мишень при трех выстрелах, будем считать вероятности этих попаданий 0,7; 0,8 и 0,9 (соответственно). Тогда можно составить (используя изложенные в главе I теоремы сложения и умножения вероятностей), следующую таблицу (называемую также рядом распределения):

X	0	1	2	3
P	0,006	0,092	0,398	0,504

P(X = 0) = 0,3 x 0,2 x 0,1 = 0,006

P(X = 1) = 0,7 x 0,2 x 0,1 + 0,3 x 0,8 x 0,1 + 0,3 x 0,2 x 0,9 = 0,092

P(X = 2) = 0,7 x 0,8 x 0,1 + 0,7 x 0,2 x 0,9 + 0,3 x 0,8 x 0,9 = 0,398

P(X = 3) = 0,7 x 0,8 x 0,9 = 0,504

Замечая, что события: X = 0; X = 1; X = 2; X = 3 образуют полную группу, должны иметь:

P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1, что легко проверяется непосредственным подсчетом.

В общем случае закон распределения ДСВ X будем записывать так:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

2. Числовые (статистические) характеристики случайных величин (ожидаемое значение; дисперсия; стандартное отклонение)

Каждая случайная величина вполне характеризуется своим законом распределения. Однако во многих задачах нахождение такого закона достаточно затруднительно, тогда как в этих же задачах имеет смысл указать лишь некоторые, но наиболее существенные, особенности распределения случайной величины, например, ожидаемое значение (среднее значение), около которого группируются возможные значения случайной величины, или некоторые числа, характеризующие степень разброса возможных значений около этого ожидаемого (среднего) значения. Указанные характеристики и называются числовыми характеристиками случайной величины и выражаются следующими определениями.

Определение 1. Ожидаемым значением (средним значением, математическим ожиданием) дискретной случайной величины X, имеющей распределение: P (X=x_i) = p_i; i = 1, 2, ..., n, называется число

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Оно обозначается M (X) = m_x = m. Итак:

X	x_1	x_2	...	x_n	$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
P(X-x_i)	p_1	p_2	...	p_n	$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Пример 1.
m ?

X	1	2	3	4	5	6	7	8
P	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

$m = 1 \times 1/8 + 2 \times 1/8 + 3 \times 1/8 + ... + 8 \times 1/8 = 1/8\ (1+2+3+...+8) = 1/8\ [(1+8)/2] \times 8 = 4{,}5$ $m = 4{,}5$

Пример 2.

m?

X	0	1	2	3
P	0,006	0,092	0,398	0,504

$m = 0 \times 0{,}006 + 1 \times 0{,}092 + 2 \times 0{,}398 + 3 \times 0{,}504 = 2{,}400$

Пример 3.

m?

Найти МО числа появлений события А в одном опыте, если вероятность появления его в одном опыте p.

X	0	1
P	1-p	p

$m = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$

Математическое ожидание (МО) случайной величины тесно связано со средним арифметическим (средним взвешенным) ее наблюдавшихся значений.

Действительно, пусть после N испытаний СВ X приняла значение x_1 ровно m_1 , $x_2 = m_2 ... x_n = m_n$ раз.

Ясно, что: $m_1 + m_2 + ... + m_n = N$.

Средним взвешенным называется выражение

$$\frac{x_1m_1+x_2m_2+...+x_nm_n}{m_1+m_2+ ... +m_n} = \frac{x_1m_1+x_2m_2+...+x_nm_n}{N} = x_1m_1/N+x_2m_2/N+...+x_nm_n/N$$

Дробь m_i/N; $i = 1,2,..., n$ представляет собой относительную частоту появления значения x_i СВ X после N испытаний, или статистическую вероятность указанного события. При достаточно большом числе испытаний среднее взвешенное (среднее арифметическое) наблюдавшихся значений СВ X фактически представляет собой МО этой величины X. Указанная здесь связь между средним арифметическим (СА) и МО составляет содержание одной из форм закона больших чисел (который будет рассмотрен нами позднее).

Итак:

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i \text{ для ДСВ X : } P(X=x_i) = p_i$$

Укажем (без доказательства) свойства МО:

1. $M(C) = C$
2. $M(CX) = C \times (M(X)$
3. $M(X \pm V) = M(X) \pm M(V)$

4. M(XV) = M(X) M(V), если X и V - независимые.

*Определение 2.*__Две СВ называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая СВ.

Легко указать две СВ, которые имеют одинаковые МО, но очень различающиеся возможные значения.

X	-100	100
P	0,5	0,5

$m_x = m_y = 0$

V	-1	1
P	0,5	0,5

Таким образом, МО СВ не дает достаточного представления о СВ; поэтому целесообразно ввести числовые характеристики, которые оценивают разброс возможных значений относительно МО.

Заметим, что часто рассматривается т.н. отклонение СВ _X от ее МО, под которым понимают: _$X - M(X) = X^0$.

Интересно, чему равно $M(X^0)$?

$M(X^0)=M(X-M(X))=M(X)-M(M(X))=M(X)-M(X)=0$

Так что рассмотрение МО отклонения ничего существенного не дает, поэтому рассмотрим МО квадрата отклонения.

Определение 3. Дисперсией (рассеиванием) СВХ (обозн. Д(X)) называется МО квадрата отклонения СВХ от ее МО:

$D(X) = M\{[X-M(X)]^2\} =D=d$

Другое название дисперсии - варианта ($=V=V_{ar}$)

Теорема. $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$

Доказательство:

$M\{[X-M(X)]^2\}=M\{X^2 2XM(X)+M^2(X)\}=M\{X^2\}2M(X)M(X)+M^2(X)= M(X^2)-M^2(X)$

При вычислении дисперсии можно пользоваться указанной теоремой или формулами, вытекающими из определения дисперсии:

Определение 4.

$$d = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 p_i \,;\ i = 1, 2,..., n:\ \text{ДСВХ} : P(X=x_i) = p_i$$

Замечание: дисперсия имеет размерность квадрата СВ; следовательно, более наглядной характеристикой разброса значений X относительно МО является величина, имеющая ту же размерность, что и сама СВ X; в качестве такой величины рассматривается т.н. стандартное (или среднее квадратическое) отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$. Итак:

Определение 5. $\sigma(X) = \sigma_x = \sigma = \sqrt{D}$

В заключение укажем свойства дисперсии (без доказательства):

1. $D(C) = 0$
2. $D(CX) = C^2D(X)$
3. $D(X \pm Y) = (D(X) + D(Y)$

Вернемся к примерам 1-3 (в начале этого пункта) и найдем - дополнительно к m -D(X) и σ(X).

<u>Пример 1.</u> $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$

$M(X^2) = 1^2x1/8 + 2^2x1/8+ ... +8^2x1/8=1/8[1^2+2^2+...+8^2] =$

$1/8 \text{ x } \frac{8(8+1)x(16+1)}{6} = \frac{9x17}{6} = \frac{3x17}{2} = \frac{51}{2} = 25{,}5$

$M^2(X) = 4{,}5^2 = 20{,}25$ $\qquad m = 4{,}5$

$D(X) = 25{,}5 - 20{,}25 = 5{,}25$ $\qquad d = 5{,}25$

$\sigma(X) = \sqrt{5{,}25} = 2{,}29$ $\qquad \sigma = 2{,}29$

<u>Пример 2.</u> $M(X^2) = 0^2 \text{ x } 0{,}06 + 1^2 \text{ x } 0{,}092 + 2^2 \text{ x } 0{,}398 + 3^2 \text{ x } 0{,}504 = 6{,}22$

$M^2(X) = 2{,}4^2 = 5{,}76$ $\quad D(X) = 6{,}22 - 5{,}76 = 0{,}46$ $\qquad m = 2{,}4$

$\sigma(X) = \sqrt{0{,}46} = 0{,}69$ $\qquad d = 0{,}46$

$\sigma = 0{,}69$

<u>Пример 3.</u> $M(X^2) = 0^2 (1\text{-}p) + 1^2 p = p$ $\qquad m = p$

$M^2(X) = p^2$ $\qquad d = pq$

$D(X) = p\text{-}p^2 = p(1\text{-}p) = pq$ $\qquad \sigma = \sqrt{pq}$

$\sigma(X) = \sqrt{pq}$

3. Равномерное дискретное распределение

Начнем с решения следующей задачи.

Круговая мишень установлена так, что может вращаться вокруг оси (0). При достаточно большой угловой скорости стрелок не может различить цифры, выписанные по одной на 8 равных секторах, и вынужден стрелять наугад. При попадании в сектор 1 стрелок выигрывает 1 у.е., в сектор 2 - 2 у.е., ... в сектор 8 - 8 у.е. Стоит ли ему участвовать в такой игре, если за право стрелять один раз надо платить 5 у.е.?

Пусть случайная величина X выражает возможные выигрыши; она может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Каждое из этих возможных значений СВ X принимает с одинаковой вероятностью 1/8. Ранее мы вычислили математическое ожидание выигрыша, равное 4.5. А стоимость выстрела 5. Стрелять много раз для данного стрелка явно невыгодно (а для хозяина тира явно выгодно). Приходим к одной из типичных "задач о разорении игрока".

Обобщая математическую часть задачи, приходим к целесообразности введения следующего определения.

Определение. Дискретная случайная величина X называется распределенной равномерно, если она с одинаковой вероятностью принимает К последовательных целых значений.

X	α	$\alpha+1$	$\alpha+2$	...	$\alpha+K-1=H$
P	1/K	1/K	1/K	...	1/K

Это распределение имеет два параметра, а именно:

1. Наименьшее целое число α;

2. Либо наибольшее целое число H, которое может принимать DCB X, либо общее число возможных значений К:

$$M(X) = 1/K\alpha + 1/K(\alpha+1) + \ldots + 1/K(\alpha + K-1) = 1/K[\alpha + (\alpha+1) + \ldots + (\alpha+K-1)] = 1/K\,\frac{\alpha+H}{2}\,K = \frac{\alpha+H}{2}$$

Можно доказать, что $D(X) = \frac{K^2-1}{12}$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{K^2-1}{12}}$$

Итак, числовые характеристики равномерного дискретного распределения находятся так:

$M(X) = m = \frac{\alpha+H}{2}$; $H = \alpha + K - 1$

$D(X) = d = \frac{K^2-1}{12}$;

$\sigma(X) = \sigma = \sqrt{(K^2-1)/12}$

Возвращаясь к задаче в начале пункта, имеем:

$m = \frac{1+8}{2} = 4.5$

$d = \frac{8^2-1}{12} = 63/12 = 21/4 = 5.25$

$\sigma = \sqrt{5.25} = 2.29$

Примечание: сравните с вычисленными ранее по общим формулам.

4. Теорема о повторении опытов. Формулы Бернулли и Пуассона

В практике часто производится многократное осуществление одного и того же опыта. В каждом из этих опытов может появиться (или не появиться) некоторое случайное событие А. При этом нас очень часто интересует результат не одного (каждого) опыта, а всей серии опытов, например: вероятность появления события А ровно m раз в серии из n опытов; или не менее m раз в серии из n опытов.

Рассмотрим решение первой из поставленных задач в условиях, когда все опыты независимы, а вероятность появления события А во всех опытах одна и та же (p); q = 1-p.

A_1 - событие А имело место в 1 опыте;

A_2 - событие А имело место во 2 опыте;

....

A_n - событие А имело место в n опыте.

$A_1A_2 \ldots A_m\bar{A}_{m+1}\bar{A}_{m+2} \ldots \bar{A}_n$ - одна из комбинаций, где событие А имеет место в m опытах, а в (m-n) опытах места не имеет.

$P(A_1A_2 \ldots A_m\bar{A}_{m+1}\bar{A}_{m+2} \ldots \bar{A}_n) = P^m \text{ x } q^{n-m}$

А всего таких “устраивающих нас” комбинаций C^m_n.

Обозначая вероятность того, что событие А наступило ровно m раз в серии из n опытов через $P_{m;n}$, имеем:

$P_{m;n} = C^m_n P^m q^{n-m}$ - теорема о повторении опытов или формула Бернулли.

Пример 1. Составить закон распределения СВХ - числа попаданий в мишень при 3-х выстрелах с вероятностью попадания при каждом из них Р = 0,8; / q = 0,2 n = 3 m = 0, 1, 2, 3.

X	0	1	2	3
P	0,008	0,096	0,384	0,512

$P(X=0) = P_{0;3} = P^0_3\ 0{,}8^0\ 0{,}2^3 = 0{,}008$
$P(X=1) = P_{1;3} = C^1_3\ 0{,}8^1\ 0{,}2^2 = 0{,}096$
$P(X=2) = P_{2;3} = C^2_3\ 0{,}8^2\ 0{,}2^1 = 0{,}384$
$P(X=3) = P_{3;3} = C^3_3\ 0{,}8^3\ 0{,}2^0 = 0{,}512$

$$\sum_{i=0}^{3} P_i = 1$$

Пример 2. В лаборатории 8 приборов, каждый из которых в течение дня может выйти из строя с вероятностью 0,2. Определить вероятность того, что за день потребуют ремонта ровно 3 прибора.

p = 0,2 q = 0,8 n = 8 m = 3

$P_{3;8} = C^3_8\ 0{,}2^3\ 0{,}8^5 = 0{,}148$

Рассмотрим предельную форму формулы Бернулли:

$n \to \infty$

$p \to 0$,   но так, что $\underline{np = a = const}$; $p = a/n$

Можно показать, что имеет место:

$\lim\limits_{n \to \infty} P_{m;n} = a^m e^{-a} / m!$ - формула Пуассона (закон редких явлений)

5. Распределение Бернулли (или биномиальное)

Определение. DCBX имеет распределение Бернулли (или биномиальное), если ее закон распределения выражается формулой Бернулли:

$P(X=m) = P_{m;n} = C_n^m P^m q^{n-m}$

$m = 0,1,2, ..., n$

p - вероятность появления события A в каждом из n независимых опытов;

$q = 1-p$

Второе название этого распределения - биномиальное - связано с тем, что формула Бернулли есть формула общего члена в разложении бинома $(p+q)^n$.

Числовые характеристики этого распределения можно вычислять по обычным правилам, но гораздо быстрее они вычисляются следующим образом:

$M(X) = n\,p$

$D(X) = npq$

$\sigma(X) = \sqrt{npq}$

Тот факт, что ДСВ X имеет распределение Бернулии с параметрами n и p, обозначается так:

$X \sim B\ (n;p)$

<u>Пример.</u> Найти числовые характеристики СВ X - числа попаданий в мишень при 3-х выстрелах с вероятностью попадания при каждом из них p = 0,8.

<u>Решение</u>: p = 0,8; q = 0,2; n = 3 $X \sim B(3: 0{,}8)$

$M(X) = 3\ 0{,}8 = 2{,}4$

$D(X) = 3\ 0{,}8\ 0{,}2 = 0{,}48$

$\sigma(X) = \sqrt{0{,}48} = 0{,}69$

Замечание: при составлении закона распределения Бернулли можно пользоваться следующей т.н. <u>рекуррентной</u> формулой:

$$P(X=m+1) = \frac{n-m}{m+1} \times \frac{p}{q} \times P(X=m)$$

<u>Пример.</u> Составить закон распределения Бернулли: $X \sim B(3;0{,}8)$, т.е. n = 3; p = 0,8; q = 0,2/ m = 0,1,2,3, используя рекуррентную формулу.

P(X = 0) = 0,2 x 0,2 x 0,2 = 0,008 (в принципе - это просто теорема умножения).

P(X=0 + 1) = P(X=1)= (3-0)/(0+1) x 0,8/0,2 x 0,008 = 3 x 4 x 0,008 = 0,096

P(X=2)=P(X=1+1)=(3-1)/(1+1) x 0,8/0,2 x 0,096 = 1x4x0,096 = 0,384

P(X=3)=P(-X=2+1)=(3-2)/(2+1) x 0,8/0,2 x 0,384=1/3 x 4 x 0,384=4 x 0,384 = = 4 x 0,128 = 0,512

X	0	1	2	3
p	0,008	0,096	0,384	0,512

6. Распределение Пуассона

Определение. ДСВ X имеет распределение Пуассона, если ее возможными значениями являются все неотрицательные целые числа (m = 0,1,2, ...), а закон распределения выражается формулой Пуассона:

$$P(X=m) = \frac{a^m \ e^{-a}}{m!}$$

Другое название распределения Пуассона - закон редких явлений.

Известно, что формула Пуассона является предельной формой формулы Бернулли при $n \to \infty$; $p \to 0$, но так, что $n\ p = a = const$. Поэтому числовые характеристики распределения Пуассона вычисляются так же, как и для распределения Бернулли:

$M(X) = n\ p = a$

$D(X) = n\ p\ q = \left| \begin{matrix} p \to 0 \\ q \to 1 \end{matrix} \right| = a$

$\sigma(X)=\sqrt{a}$

Поэтому a - параметр распределения Пуассона. Справедливо и обратное утверждение: если в некотором распределении M(X) и Д(X) совпадают (хотя бы приближенно), то это распределение можно считать распределением Пуассона с соответствующим параметром.

<u>Пример.</u> Производится 50 выстрелов по некоторой цели с вероятностью попадания при каждом из них 0,04. Обозначая X - число попаданий в мишень, найти P(X=0); P(X=1); P(X=2).

<u>Решение.</u> X ~ B (50; 0,04)

M(X) = 50 x 0,04 = 2

Д(X) = 50 x 0,06 x 0,96 = 1.92 $\approx$ 2

M(X) = Д(X) = 2   a = 2

$P(X=0) = \frac{2^0\ e^{-2}}{0!} = 1/e^2 = 1{,}353$

$P(X=1) = \frac{2^1\ e^{-2}}{1!} = 2 \text{ x } 1/e^2 = 2 \text{ x } 0{,}1353 = 0{,}2706$

$P(X=2) = \frac{2^2\ e^{-2}}{2!} = 2 \text{ x } 1/e^2 = 0{,}2706$

<u>Замечание</u>: здесь также есть рекуррентная формула

$P(X=m+1) = a/(m+1) \times P(X=m)$

Решим тот же пример:

$P(X=0) = 2^0 e^{-2}/0! = 1/ e^2 = 0{,}1353$

$P(X=1) = P(X=0+1) = 2/1 \times P(X=0) = 0{,}2706$

$P(X=2) = P(X=1+1) = 2/2 \times P(X=1) = 0{,}2706$

7. Геометрическое распределение

Представим себе, что мы повторяем некоторый эксперимент с вероятностью успеха p при каждом испытании до тех пор, пока не наступит первый успех. Определим СВ X как число потребовавшихся испытаний. Очевидно, что эта СВ является дискретной и может принимать любые целые положительных значений: 1, 2, 3 ... . Первый успех наступит при m испытании, если предыдущие (m-1) испытаний окончились неудачей, а m -испытание окончилось удачей (успехом).

Таким образом, вероятность того, что СВ X примет значение, равное m, выражается формулой:

$P(X=m) = q^{m-1} p; \quad q = 1-p$

Определение. ДСВ X имеет геометрическое распределение, если ее возможные значения m = 1, 2, 3, ... (целые положительные числа), а вероятности этих возможных значений определяются формулой

$$P(X=m) = q^{m-1} p,$$

где p - вероятность успеха; q = 1-p.

Составим ряд распределения в этом случае:

X	1	2	3	...	m	...
P	p	qp	q^2p	...	$q^{m-1}p$	...

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X=x_i) = 1$$

$P(X=m) = q^{m-1}p$ - общий член геометрической прогрессии с $u_1 = p$; $q = q$; $0<p<1$; $0<q<1$.

Проверим, что:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X=x_i) = p + qp +q^2p + ... q^{m-1}p + ... p(1+q +q^2 +...+ q^{m-1}+...)=p\ 1/1-q=p\ 1/p = 1$$

Вычислим:

$M(X) = 1 [p + 2 pq + 3pq^2+ ... = m$

Умножим это равенство на q:

$qm = pq + 2pq^2 + 3pq^3 + ...$

$m-qm = p + pq + pq^2 + ...$

$m(1-q) = p(1+q +q^2 + ...)$

$m(1-q) = p\ 1/1-q$

$mp = p \times 1/1\text{-}q$ $\quad\quad$ $m = 1/1\text{-}q = 1/p$ $\quad\quad$ $\underline{m = 1/p}$.

Можно показать, что $Д(X) = d = q/p^2$.

Итак, числовые характеристики геометрического распределения имеют вид:

$m = 1/p \quad d = q/p^2 \quad\quad \sigma = \sqrt{q}/p$.

Кроме того, имеет место рекуррентная формула: $P(X=m+1) = q\, P(X=m)$.

В заключение подчеркнем различие между биномиальным и геометрическим распределениями. Оба распределения имеют отношение к повторным испытаниям для эксперимента с двумя исходами - успехом с вероятностью $\underline{p}$ и неудачей с вероятностью $\underline{q\ =1\text{-}p}$. Если эксперимент выполняется фиксированное число раз n и нас интересует вероятность ровно m успехов при n испытаниях (т.е. Pm;n), то мы приходим к биномиальному распределению (формуле Бернулли). Для геометрического распределения заранее не фиксируется, скоклько раз мы выполняем эксперимент. Он повторяется до тех пор, пока не наступит первый успех. Случайной величиной здесь является число испытаний до первого успеха (включительно).

8. Применение основных законов распределения при решении задач

1. Задача Банаха.

Пусть в двух коробках имеется по n спичек. Бросим монету. При появлении герба удаляем спичку из 1 коробки; при появлении цифры - спичку из 2 коробки. Какова вероятность того, что при полном опустошении 1 коробки во 2-й останется m спичек?

Решение.

Обозначим событие А - “при полном опустошении 1-й коробки во 2-й осталось m спичек”; событие A_1 - “спичка удалена из 1 коробки”; событие A_2 “спичка удалена из 2 коробки”, $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$. Если при опустошении 1-й коробки во 2-й останется m спичек, значит, при 2 n-m бросаниях монеты n раз появился герб, n-m - цифра. Значит, событие A_1 произошло n раз при 2 n-m испытаниях. По формуле Бернулли:

$P(A) = C^n_{2n-m} \times (1/2)^n \times (1/2)^{n-m} = C^n_{2n-m} \times 1/2^{2n-m}$

2. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету p. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью $p \geq 0{,}95$?

Решение.

Вероятность выигрыша, очевидно, мала, а число билетов, которые нужно купить, явно велико, поэтому случайное число выигрышных билетов приближенно есть распределение Пуассона.

События “ни один из купленных билетов не является выигрышным” и “хотя бы один билет выигрышный” - противоположные. Тогда $P(0; n) + P_1 = 1$

$P(0;n) = \underline{a^0 e^{-a}/0!} = e^{-a}$ $\quad a = n\,p$

$P_1 = 1 - P(0;n) = 1 - e^{-a}$ $\quad P_1 \geq 0{,}95 \quad 1 - e^{-a} \geq 0{,}95$

$e^{-a} \leq 0{,}05;\ e^{-3} = 0{,}05$

$e^{-a} \leq e^{-3} \Rightarrow a \geq 3,\ np \geq 3 \quad n \geq 3/p$

Если p = 0,01, то n ≥300

Ответ: надо купить не менее 300 билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с достоверностью не менее 0,95.

3. Обезьяна получает 6 предметов, лишь один из которых проходит через отверстие рамки. Она пытается просунуть через рамку предмет. Допустим, что один и тот же предмет не берется ею дважды, т.е. взятый предмет откладывается в сторону. Каково МО числа испробованных предметов?

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

X - число испробованных предметов.

P(X=1) = 1/6 P(X=4) = 5/6x4/5x3/4x1/3 =1/6

P(X=2) = 5/6x1/5=1/6 P(X=5) = 5/6x4/5x3/4x2/3x1/2 =1/6

P(X=3) = 5/6x4/5x1/4=1/6 P(X=6) = 5/6x4/5x3/4x2/3x1/2x1=1/6

M(X) = (1+6)2 = 3,5 (равномерное дискретное распределение)

4. В условиях предыдущего примера допустим, что взятый предмет возвращается в “шестерку”. Каково МО числа испробованных предметов в этом случае?

X	1	2	3	...
$P(X=x_i)$	1/6	5/6 x 1/6	$(5/6)^2$x 1/6	...

- геометрическое распределение;

P = 1/6

M(X) = 6

Замечание: 3 и 4 рассматривать как простой эксперимент по обучению. Если обезьяна регулярно учится играть в эту игру, то число предметов, испробованных до того, как один из них пройдет через отверстие рамки, убывает от 6 и более до 3,5 и менее. В том случае, когда наблюдаемое число попыток неуклонно убывает по мере повторения игры, это может служить указанием на то, что происходит обучение.

Для лучшего усвоения изложенного выше теоретического материала предлагаем изучающим его выполнить контрольную работу, предварительно решив одну из задач следующего варианта.

Задача 1. Подбрасываются 2 игральных кубика. Случайная величина X - сумма очков, выпавших на двух гранях. Составить ряд распределения СВХ; найти m; d; σ.

Решение.

Вообще говоря, задача уже почти решена. Самое трудное сделано ранее (см. задачу “Игра в крэпс”) - ряд распределения составлен (напомним его):

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Остались арифметические подсчеты:

M = M(X) = 2 x 1/36 + 3 x 2/36 + 4 x 3/36 + 5 x 4/36 + 6 x 5/36 + 7 x 6/36 + 8 x 5/36 + 9 x 4/36 + 10 x 3/36 + 11 [2/36 + 12 x 1/36 = 7

Замечание: M(X) можно вычислить проще, использовав одно из свойств математического ожидания (подумайте, как это вычисляется!)

$d = D(X) = M(X^2) - M^2(X)$

$M(X^2) = 2^2$ x 1/36 + 3^2 x 2/36 + 4^2 x 3/36 + 5^2 x 4/36 + 6^2 x 5/36 + 7^2 x 6/36 + 8^2 x5/36 + 9^2 x 4/36 + 10^2 x 3/36 + 11^2 x 2/36 + 12^2 x 1/16 = 54 5/6

d = D(X) = 54 5/6 - 49 = 5 5/6

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ $\sigma=\sigma(X)\cong 2{,}4$

Приведем остальные варианты (число их может быть увеличено за счет гипергеометрического распределения, если взять и это распределение для изучения). Заметим, что вторая задача каждого из вариантов содержит требование дать определение одного из распределений, рассмотренных в этой главе, а также указать три примера соответствующего распределения, которые могут быть подобраны из задач, заключающих эту главу или составленных самостоятельно.

Вариант 1.

1. Подбрасываются два игральных кубика. Случайная величина X - произведение выпавших очков. Найти ряд распределения СВ X; m; d; σ.

2. Равномерное дискретное распределение (определение, 3 примера).

Вариант 2.

1. В ящике находятся 4 шара с номерами от 1 до 4. Вынули два шара. Случайная величина X - сумма номеров шаров. Составить ряд распределения СВ X; найти m; d; σ.

2. Распределение Бернулли (определение, 3 примера).

Вариант 3.

1. В ящике находятся 4 шара с номерами от 1 до 4. Вынули два шара. Случайная величина X - произведение номеров шаров. Составить ряд распределения СВ X; найти m; d; σ.

2. Распределение Пуассона (определение, 3 примера).

Вариант 4.

1. Бросают 3 монеты. Случайная величина X - число выпавших гербов. Составить ряд распределения СВ X; найти m; d; σ.

2. Геометрическое распределение (определение, 3 примера).

Задачи для самостоятельного решения

1. Монету подбрасываем 7 раз. Сколько раз в среднем может появиться герб (3-4)

2. Игральный кубик бросают 12 раз. Сколько раз в среднем может появиться шестерка?(2)

3. У дежурного гостиницы в кармане 8 разных ключей от разных комнат. Взяв наугад ключ, он пробует открыть дверь ближайшей комнаты. Сколько раз в среднем ему придется пробовать открывать эту комнату, если:

а) проверенный ключ кладется обратно в карман (8);

б) проверенный ключ не кладется обратно в карман (4-5)?

4. Стрельба по мишени ведется до второго попадания. Найти математическое ожидание числа выстрелов, если вероятность попадания одним выстрелом близка к 0,2 (10).

5. Стрельба по мишени ведется до к-го попадания. Запасы патронов не ограничены. Вероятность попадания р. Сколько в среднем патронов будет израсходовано? (к/р).

6. Из ящика, содержащего 4 белых и 3 черных шара, последовательно извлекают шары (наудачу), причем операция извлечения продолжается до появления белого шара. Найти закон распределения числа X извлеченных черных шаров, если известно, что: а) вынутые шары в ящик не возвращаются; б) вынутые шары в ящик возвращаются?

а)

X	0	1	2	3
P	4/7	2/7	4/35	1/35

б) $P(X=n) = 4/7 \times (3/7)^n$, где n = 0,1,2, ...

7. Игральный кубик бросают до первого появления на нем шести очков. Найти законы распределения случайной величины X - число сделанных бросаний (включая последнее бросание, при котором появилось шесть очков) [$P(X=n) = 1/6(5/6)^{n-1}$, где n = 1,2,3 ...]

8. Два человека заняты игрой (в которой ничейные исходы не учитываются). Зная, что участники игры одинаково сильны, найти вероятность того, что в матче из 10 партий каждый выиграет 5 партий (63/256)

9. Пару игральных кубиков бросают 10 раз. Какова вероятность того, что: а) 12 очков появятся 2 раза? б) 3 очка появятся 2 раза? в) 7 очков появятся 4 раза? [а) $C^2_{10} \times (1/36)^2 \times (35/36)^8$; б) $C^2_{10} \times (1/18)^2 \times (17/18)^8$; в) $C^4_{10} \times (1/6)^4 \times (5/6)^6$]

10. В аэропорту производят посадку в среднем 3 самолета в минуту. Какова вероятность того, что в течение 2 минут произведут посадку не менее 4 самолетов? (0,848795 = 0,85)

11. Дворцовый чеканщик кладет в каждый ящик вместимостью в 100 монет одну фальшивую. Король подозревает чеканщика и подвергает проверке

монеты, взятые наудачу по одной в каждом из 100 ящиков. Какова вероятность того, что чеканщик не будет разоблачен? [$(1-1/100)^{100} \approx 0{,}366$]

12. Фермер продает огурцы в ящиках, по 100 огурцов в каждом ящике. Выяснилось, что в каждый партии из 1000 огурцов приблизительно 15 некачественных: гнилые, лопнувшие и т.д. Перед фермером встал вопрос: сколько огурцов надо положить в ящик, чтобы с вероятностью 0,8 удовлетворить запросы покупателя (чтобы в ящике было не менее 100 хороших огурцов с вероятностью 0,8)? (102)

13. Устройство состоит из трех независимо работающих основных элементов и нескольких резервных. Вероятность отказа каждого элемента за время t равна 0,1. Найти вероятность безотказной работы устройства за время t, если: а) работают только основные элементы; б) включен один резервный элемент; в) включены 2 резервных элемента. Предполагается, что резервные элементы работают в том же режиме, что и основные, вероятность отказа каждого резервного элемента также 0,1 и устройство отказывает, если работает менее трех элементов.

[а) $0{,}9^3 = 0{,}729$; б) $C^3{}_4 \times 0{,}9^3 \times 0{,}1 + C^4{}_4 \times 0{,}9^4 \approx 0{,}95$; в) $C^3{}_5 \times 0{,}9^3 \times 0{,}1^2 + C^4{}_5 \times 0{,}9^4 \times 0{,}1 + C^5{}_5 \times 0{,}9^5 \approx 0{,}99$]

14. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0,9. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту

[$P(X=m) = 0{,}9^{m-1} \times 0{,}1$; где m = 1,2,3 ...]

15. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути 0,002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно 3; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

[а) =0,06; б) =0,920; в) = 0,074; г) =0,632]

16. Среди 10 деталей имеется 8 стандартных. Случайным образом отобраны две детали. Составить закон распределения X-числа стандартных деталей среди отобранных; найти m, d, σ.

17. В отдел уголовного розыска поступило сообщение о том, что 5 неизвестных лиц взломали сейф кассы одного из городских учреждений. Свидетели успели заметить, что грабители сели в автобус, следующий по маршруту в соседний город. Об этом сразу же была поставлена в известность милиция. Когда автобус остановился на автовокзале, к его дверям подошел инспектор уголовного розыска и попросил водителя не открывать дверь автобуса. Тот сообщил инспектору, что в автобусе 40 пассажиров, и обыск может привести к значительной задержке рейса. Инспектор успокоил водителя: "Мне достаточно проверить человек 6 пассажиров, потом вы сможете ехать дальше". Он предложил шестерым наугад выбранным пассажирам зайти в

кабинет начальника вокзала. Один преступник был обнаружен сразу - в его кармане нашли пачку денег. Он назвал сообщников, и дело было закончено.

Что руководило инспектором: интуиция, риск или трезвый расчет?

Глава III. ПРОГРАММИРОВАНИЕ НА ЯЗЫКЕ БЕЙСИК (элементы компьютерного моделирования)

Ранее - во введении - автор сформулировал принцип единства трех линий математического анализа явлений действительности - стохастической, детерминистической и программистской (компьютерной).

Уточняя наши соображения по этому вопросу, отметим, что компьютерная линия отражена прежде всего в том разделе дисциплины “Математика: общий курс”, который назван нами “Программирование на языке Бейсик” (“Элементы компьютерного моделирования”). В этом разделе даются необходимые сведения об ЭВМ и языке Бейсик и приводится “Библиотека стандартных программ (БСП)”, составленная автором из оригинальных или известных программ, способствующих изучению разделов дисциплины “Математика: общий курс”.

В соответствии с этим отметим, что необходимыми сведениями об ЭВМ мы считаем понятия языка программирования (в частности, языка Бейсик) и системы с Бейсиком (обычный набор компонентов, составляющих основу системы с Бейсиком - устройство ввода и вывода; операционная система; управляющее устройство и арифметико-логическое устройство; память; архив).

Остановимся подробнее на языке программирования (алгоритмическом языке) Бейсик.

Изучение любого языка (языка программирования) начинается со знакомства с набором его изобразительных средств - алфавитом языка. Символика Бейсика в значительной мере определяется его ориентацией на работу в режиме диалога. Выносной пульт - терминал, с помощью которого пользователь общается с ЭВМ, - обычно конструируется на базе телетайпов, электрифицированных пишущих машинок, дисплеев. Поэтому алфавит Бейсика определяется общим для разных клавиатур набором символов. В базовой версии Бейсика имеем:

- 26 заглавных латинских букв от A до Z;
- 10 цифр от 0 до 9;
- знаки арифметических операций (+, -, *, /, ↑);
- знаки операции отношения (=; >, ≥,≤,<,≠);
- знаки препинания (точка, запятая, точка с запятой, двоеточие, кавычки);
- круглые скобки;
- несколько специальных символов и пробел.

От версии к версии алфавит Бейсика может изменяться.

Программы, написанные на любом из алгоритмических языков, есть последовательность некоторых операций, выполняемых над определенными объектами. И принципиально один алгоритмический язык отличается от другого множеством допустимых объектов и набором операций над этими объектами.

Основными объектами Бейсика являются текстовые и числовые константы вещественного типа, стандартные и нестандартные функции, арифметические выражения. Остановимся на некоторых из них подробнее.

Ни одна из программ не обходится без употребления числовых констант - чисел, задающих значения исходным данным или входящих в качестве операндов в арифметические выражения. На форму записи чисел Бейсик накладывает два синтаксических ограничения:

- целая часть чисел отделяется от дробной точкой, а не запятой (например, вместо - 99,6 надо писать - 99.6);

- для удобства в представлении слишком больших или слишком малых чисел допускается употребление степенного множителя (например, число 0,622 * 10 в минус 23 степени в Бейсике записывается как 0.622 E-23 или 6.22 E-24).

Как известно, в математике под вещественной функцией понимают отображение множества значений ее аргумента (или аргументов) на множество вещественных чисел. В ЭВМ роль такого отображения выполняют машинные программы, а точнее подпрограммы, на вход которых поступает значение аргумента (набор значений аргументов), а результатом работы является одно-единственное число - значение функции.

Для наиболее употребительных функций такие подпрограммы имеются на каждой ЭВМ. Такие функции называются стандартными. Для их обозначения в Бейсике используются трехбуквенные английские наименования. Аргумент функции заключается в круглые скобки, и им может быть любое арифметическое выражение.

Обозначение функции	Пояснение
ABS (X)	Модуль аргумента
ATN (X)	Арктангенс
COS (X)	Косинус
EXP (X)	Экспонента
INT (X)	Ближайшее целое ≤ x
LOG (X)	Натуральный логарифм
SGN (X)	Знак (сигнум) аргумента x:

$$\mathrm{SGN}(X) = \begin{cases} -1; & x < 0; \\ 0; & x = 0; \\ 1; & x > 0 \end{cases}$$

SIN (X)	Синус
TAN (X)	Тангенс
SQR (X)	Квадратный корень
RND	Датчик случайных чисел из (0; 1) с
RND (X)	равномерным законом распределения

Кроме стандартных функций, пользователь может вводить в своей задаче и нестандартные функции. Однако в этом случае он должен дать формулу выполнения новой функции (описать эту формулу). Имена нестандартных функций должны содержать три латинские буквы и начинаться с комбинации FN. Например:

```
100  DEF FNI(X)=EXP(X)-EXP(-X)
110  DEF FNR(A,B)=SQR(A↑2+B↑2)
```

В строке с номером 100 описана функция FNI от одного аргумента x, вычисляющая значение выражения $e^x - e^{-x}$. В строке с номером 110 содержится описание функции FNR от двух аргументов, выдающей значение длины вектора с координатами (A,B).

Арифметические выражения составляются из числовых операндов констант, переменных и функций, объединенных знаками арифметических операций. На запись формул накладывается единственное ограничение - выражение должно быть расположено в одной программной строке и не содержать каких-либо надстрочных или подстрочных знаков.

При записи арифметических выражений можно использовать круглые скобки для указания порядка выполнения операций. Полезнее поставить лишние скобки, чем размышлять, например, о значении выражения -X^2. Внутри скобок сохраняется общепринятый порядок выполнения арифметических действий. Укажем полный список операторов базовой версии и их основные функции.

DATA	Формирование блока данных
DEF	Описание нестандартных функций
DIM	Описание (объявление) массивов
END	Конец программы
FOR	Заголовок цикла
GOSUB	Переход на подпрограмму
GOTO	Безусловный переход
IF	Условный переход
INPUT	Ввод по запросу программы
LET	Оператор присваивания
NEXT	Оператор проверки конца цикла
ON	Переключатель
OPTION BASE	Указание минимального индекса для элементов массива
PRINT	Вывод числовых и текстовых данных
RANDOMIZE	Перенастройка генератора случайных чисел
READ	Выборка из блока данных
REM	Комментарий в программе
RESTORE	Восстановление блока данных
RETURN	Возврат из программы
STOP	Остановка работы программы

“Библиотека стандартных программ” (программы написаны на языке Бейсик) включает в себя 25 программ, которые позволяют нам находить значение стандартных и нестандартных функций, распечатывать таблицы значений функций; вычислять интегралы по методу трапеций и по методу Монте-Карло; вычислять числовые (статистические) характеристики (ожидаемое значение; дисперсию; стандартное отклонение) как нестандартных, так и основных (стандартных) распределений - Бернулли, Пуассона, геометрического, равномерного дискретного, равномерного непрерывного; а также решать некоторые другие задачи.

Некоторые из программ, входящие в БСП, применяются для компьютерного моделирования определенных ситуаций (связанных, например, с моделированием случайного выбора некоторых чисел с последующим применением этого для определения статистической вероятности некоторых событий - подробнее об этом смотрите во введении).

Программы, моделирующие процесс подбрасывания монеты (или кубика, или двух кубиков), а также результаты счета по этим программам, приводятся ниже

```
BMP20
10 REM MONETA
20 CLS
30 PRINT “введите число подбрасывания”
40 INPUT “N=“; N
50 FOR M=1 TO N
60 K=INT (2*RND(1))
70 IF K=0 THEN X=X+1 ELSE Y=Y+!
80 NEXT M
90 A=X/N
100 B=Y/N
110 LOCATE 5, 10
120 PRINT “число выпадений”, “вероятность выпадения”
130 PRINT “герб”, X,A
140 PRINT “цифра”, Y, B
150 END
```

Результаты BMP20:

		Число выпадений	Вероятность выпадения
N=100	герб	52	0,52
	цифра	48	0,48
N=10000	герб	5075	0,5075
	цифра	4925	0,4925
N=1000000	герб	499479	0,499479
	цифра	500521	0,500521

```
BMP18
10 REM CUBUS
20 CLS
30 DIM X(6)
```

```
40 DIM A(6)
50 PRINT “введите число подбрасываний”
60 INPUT “M=“; N
70 FOR M=1 TO N
80 Z=INT(6*RND(1)+1)
90 FOR K=1 TJ 6
100 NEXT K
120 NEXT M
130 PRINT “цифра”, “число выпадений”, TAB(45); “вероятность”
140 FOR K=1 TO 6
150 A(K)=X(K)/N
160 PRINT K; TAB(20); X(K); TAB (45); A(K)
170 NEXT K
180 END
```

BMP19

```
10 DIM N(5)
20 PRINT:PRINT:PRINT “моделирование числа, выпавшего при бросании игральной кости”
30 PRINT:INPUT”введите длину серии”; N
40 FOR I=1 TO N
50 R=INT(6*RND(1))
60 N(R)=N(R)+1
70 NEXT 1
80 PRINT
90 FOR I=0 TO 5:PRINT I+1, N(I)/N:NEXTI
100 END
```

Результаты BMP18 и BMP19:

N 100

цифра	Число выпадений	вероятность
1	17	.17
2	19	.19
3	16	.16
4	10	.10
5	22	.22
6	16	.16

N=1000

цифра	Число выпадений	вероятность
1	152	.152
2	167	.167
3	190	.190

4	158	.158
5	164	.164
6	169	.169

N=100000

цифра	Число выпадений	вероятность
1	16700	.16700
2	16762	.16762
3	16600	.16600
4	16689	.16689
5	16732	.16732
6	16517	.16517

N=10000000

цифра	Число выпадений	вероятность
1	1665902	.1665902
2	1664816	.1664816
3	1666179	.1666179
4	1665377	.1665377
5	1669193	.1669193
6	1668533	.1668533

Для моделирования суммы чисел, выпавших на двух игральных костях, или суммы чисел, полученной при двукратном бросании одной кости, можно использовать одну из следующих программ:

```
BMP15
10 DIM N(10)
20 PRINT:PRINT:PRINT"сумма чисел, выпавших на двух игральных костях"
30 PRINT:INPUT"введите длину серии"; N
40 FOR I=1 TO N
50 R=INT(6*RND(1)+INT(6*RND(1))
60 N(R)=N(R)+1
70 NEXT 1
80 PRINT
90 FOR I=0 TO:PRINT I+2, N(I)/N: NEXT I
100 END
```

Результаты BMP15

N=100000			N=10000000		
Сумма	Наблюдаемая частота	Вероятность	Сумма	Наблюдаемая частота	Вероятность
2	2710	.02710	2	277905	.0277905

3	5624	.05624	3	555476	.0555476
4	8255	.08255	4	834127	.0834127
5	11095	.11095	5	1110407	.1110407
6	13925	.13925	6	1386882	.1386882
7	16729	.16729	7	1667929	.1667929
8	13936	.13936	8	1390741	.1390741
9	11007	.11007	9	1109933	.1109933
10	8403	.08403	10	832874	.0832874
11	5575	.05575	11	555749	.0555749
12	2741	.02741	12	277977	.0277977

ВМР16

```
10 DIM N(12)
20 PRINT:PRINT:PRINT” сумма чисел, выпавших на двух игральных костях”
30 PRINT:INPUIT” введите длину серии”; N
40 FOR I=1 TJ N
50 X=RND(1):IF X<0/5 THEN R=INT(3+SQR(1+288*X))/2)
55 IF X>=0.5 THEN R=INT((27-SQR(289+288*X))/2)
60 N(R)=N(R)+1
70 NEXT I
80 PRINT
90 FOR I =2 TO 12:PRINT I, N(I), N(I)/N:NEXT I
100 END
```

Результаты ВМР16

N=1000			N=10000000		
Сумма	Наблюдаемая частота	Вероятност ь	Сумма	Наблюдаемая частота	Вероятнос ть
2	278	.0278	2	277180	.0277180
3	550	.0550	3	554881	.0554881
4	855	.0855	4	833841	.0833841
5	1130	.1130	5	1109701	.1109701
6	1422	.1422	6	1388188	.1388188
7	1643	.1643	7	1665898	.1665898
8	1401	.1401	8	1388500	.1388500
9	1085	.1085	9	1113278	.1113278
10	802	.0802	10	834545	.0834545
11	566	.0566	11	556152	.0556152
12	268	.0268	12	277836	.0277836

Приведем также некоторые программы, относящиеся к дискретным случайным величинам и основным законам их распределения.

BMP29

```
05 REM ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДСВ X
10 DIM X(100), P(100)
20 INPUT “ВВЕДИТЕ ЧИСЛО К”, K
30 FOR I = 1 TO K
40 INPUT “ВВЕДИТЕ ЧИСЛА X, P”, X(I), P(I)
50 NEXT I
60 GOSUB 300
70 GOSUB 400
80 PRINT “ОЖИДАЕМОЕ  ЗНАЧЕНИЕ m=“;A
90 PRINT “ДИСПЕРСИЯ d=“;D
95 PRINT “СТАНДАРТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ σ=“; SQR(D)
100 STOP
27- REM ВЫЧИСЛЕНИЕ m
300 A=0
310 FOR I=1 TO K
320 AI=X(I)+P(I)
330 A=A+AI
340 NEXT I
350 RETURN
370 REM ВЫЧИСЛЕНИЕ d
400 D=0
410 FOR I=1 TO K
420 DI=(X(I)-A)^2
430 DI=DI*P(I)
440 D=D+DI
450 NEXT I
460 RETURN
470 END
```

BMP28

Формула Бернулли

```
05 PRINT
10   “ВВЕДИТЕ M,N,P”
20 INPUT M,N,P
30 IF N>M THEN 60
40 PRINT “M>N”
50 GOTO 200
60 F=N
70 GOSUB 210
80 N1=F1
90 F=M
```

```
100 GOSUB 210
110 M1=F1
120 F=N=M
130 GOSUB 210
140 M2=F1
150 C1=N1/M1/M2
160 P1=P^M
170 P2=(1-P)^(N-M)
180 C=C1*P1*P2
190 PRINT “P=“;C
200 STOP
210 F1=1
220 F2=0
230 IF F=F2 THEN 270
240 F2=F2+1
250 F1=F1*F2
260 GOTO 230
270 RETURN
280 END
```

BMP24

```
10 CLS
20 REM R3
30 PRINT “РАВНОМЕРНОЕ ДИСКРЕТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ”
50 PRINT
60 PRINT “ПУСТЬ X-ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА, КОТОРАЯ С”
70 PRINT”ОДИНАКОВОЙ ВЕРОЯТНОСТЬЮ ПРИНИМАЕТ ЛЮБОЕ ЦЕЛОЕ”
80 PRINT “ЗНАЧЕНИЕ ОТ L до L+k-1.”
90 PRINT
100 PRINT”ВВЕДИТЕ k-ОБЩЕЕ ЧИСЛО ВОЗМОЖНЫХ ЗНАЧЕНИЙ”
110 INPUT K
120 LET M=(L+K-1))/2
130 LET D=((K^2)-1)/12
140 PRINT”P(X=k)=“;P
150 PRINT
160 PRINT “ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДАННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ:”
170 PRINT
180 PRINT”МАТ.ОЖИДАНИЕ M(X)=“;M
190 PRINT
```

```
200 PRINT”ДИСПЕРСИЯ D(X)=“;D
210 PRINT
220 PRINT”СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ Q(X)=“;
SQR(D)
230 END

10 CLS
20 REM BMP21
30 PRINT Распределение Бернулли
40 PRINT”ВВЕДИТЕ ВЕРОЯТНОСТЬ УСПЕХА ПРИ КАЖДОМ
НЕЗАВИСИМОМ”
50 PRINT”ИСПЫТАНИИ, p=“
60 INPUT P
70 PRINT”ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ИСПЫТАНИЙ”
80 PRINT”n”
90 INPUT N
100 PRINT “ВВЕДИТЕ ЧИСЛО УСПЕХОВ ПРИ ВСЕХ ИСПЫТАНИЯХ”
110 PRINT “m=“
120 INPUT M
130 IF N>M THEN 200
140 PRINT “НАРУШЕНО УСЛОВИЕ n>m. ПОВТОРИТЕ ВВОД”
150 GOTO 110
160 REM N!
170 LET K=N
180 GOSUB 520
190 LET N1=F
200 REN M!
210 LET K=M
220 IF K>1 THEN 250
230 LET M1=1
240 GOTO 270
250 GOSUB 520
260 LET M1=F
270 REM (N-M)!
280 LET K=N-M
290 IF K>1 THEN 320
300 LET M2=1
310 GOTO 340
320 GOSUB 520
330 LET M2=F
340 LET C1-N1/(M1*M2)
350 A=P^M
360 B=(1-P)(N-M)
```

```
370 C=C1*A*B
380 PRINT "ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО ПРИ n ИСПЫТАНИЯХ ЧИСЛО"
390 PRINT "УСПЕХОВ РАВНО m, Т.Е"
400 PRINT "P(X=m)=";C
410 PRINT
420 PRINT "ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДАННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ"
430 PRINT
440 R=N*P
450 PRINT "МАТ.ОЖИДАНИЕ M(X)=";R
460 PRINT
470 D=N*P*(1-P)
480 PRINT "ДИСПЕРСИЯ D(X)=';D
490 PRINT
500 PRINT "СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ Q(X)=";SQR(D)
510 STOP
520 REM ФАКТОРИАЛ
530 LET F=1
540 FOR I=2 TO K
550 LET F=F81
560 NEXT I
570 RETURN
580 END
```

```
10 CLS
20 REM BMP22
30 PRINT РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА
40 PRINT
50 PRINT"ВВЕДИТЕ p (pОЧЕНЬ МАЛО)-ВЕРОЯТНОСТЬ УСПЕХА В КАЖДОМ"
60 PRINT"В КАЖДОМ НЕЗАВИСИМОМ ИСПЫТАНИИ"
70 PRINT"p="
80 INPUT P
90 PRINT"ВВЕДИТЕ n (n ОЧЕНЬ ВЕЛИКО) - ЧИСЛО ИСПЫТАНИЙ"
100 PRINT "n="
110 INPUT N
120 PRINT"ВВЕДИТЕ ЧИСЛО УСПЕХОВ ВО ВСЕХ ИСПЫТАНИЯХ"
130 PRINT "k="
140 INPUT K
150 LET L=N*P
160 LET T=EXP(L)
170 IF K>1 THEN 200
```

```
180 LET F=1
19- GOTO 210
200 GOSUB 330
210 LET C=(L^K) / (F*T)
220 PRINT"ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО n ПРИ ИСПЫТАНИЯХ ЧИСЛО
УСПЕХОВ"
230 PRINT"РАВНО k, Т.Е"
240 PRINT "P(X=K)=";C
250 PRINT
260 PRINT"ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДАННОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ:"
270 PRINT
280 PRINT"МАТ.ОЖИДАНИЕ M(X)=";L
290 PRINT
300 PRINT"ДИСПЕРСИЯ D(X)=";L
310 PRINT
320 PRINT"СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ Q(X)=";
SQR(L)
330 REM ВЫЧИСЛЕНИЕ K!
340 REM K -ВХОДНОЙ ПАРАМЕТР
350 REM F-РЕЗУЛЬТАТ ВЫЧИСЛЕНИЯ
360 LET F=1
370 FOR I=1 TO K
380 F=F*I
390 NEXT I
400 RETURN
410 END
```

```
10 CS
20 REM BMP23
30 PRINT"ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ"
40 PRINT
50 PRINT"ВВЕДИТЕ НОМЕР ИСПЫТАНИЯ, ОКОНЧИВШЕГОСЯ
УСПЕХОМ"
60 PRINT"n="
70 INPUT N
80 PRINT"ВВЕДИТЕ ВЕРОЯТНОСТЬ УСПЕХА ПРИ КАЖДОМ
НЕЗАВИСИМОМ"
90 PRINT"ИСПЫТАНИИ"
100 PRINT"p="
110 INPUT P
120 A=1-P
130 B=N-1
```

```
140 A=A^B
150 C+A*P
160 PRINT”ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО УСПЕХ НАСТУПИТ НА N-OM”
170 PRINT”ИСПЫТАНИИ,Т.Е. P=(X=n)=“;C
180 PRINT
190 PRINT”ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДАННОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ:”
200 PRINT
210 PRINT”МАТ.ОЖИДАНИЕ M(X)=“1/P
220 PRINT
230 D=P^2
240 D=(1-P) / D
250 PRINT”ДИСПЕРСИЯD(X)=“;D
260 PRINT
270 PRINT”СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ
Q(X)=“;SQR(D)
280 END
```

Литература

1. Вайкс А. Энциклопедия азартных игр. М.: Ефрат, 1994.

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.

3. Знакомьтесь: Персональная ЭВМ “Корвет” / Под ред. Е.П. Велихова. М.: Наука, 1989.

4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1979.

5. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ. М.: Наука, 1987.

6. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. М.: Просвещение, 1991.

7. Кетков Ю.Л. Программирование на Бейсике. М.: Статистика, 1978.

8. Кетков Ю.Л. Диалог на языке Бейсик для мини- и микро-ЭВМ. М.: Наука, 1988.

9. Лютикас В.С. Факультативный курс по математике (теория вероятностей). М.: Просвещение, 1990.

10. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных задач с решением. М.: Наука, 1971.

11. Теннант-Смит Д. Бейсик для статистиков. М.: Мир, 1988.

Щукин Евгений Иванович

МАТЕМАТИКА.
Теория вероятностей

Редактор, корректор А.А. Аладьева
Компьютерная верстка Л.А. Кузьмичевой

Лицензия ЛР № 020319 от 30.12.96.
Подписано в печать 11.07.2000. Формат 60x84/16. Бумага тип. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4,0. Уч.-изд. л. 2,8. Тираж 100 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета.
Отпечатано на ризографе.
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.